



TITLE:

スケールフリーネットワーク上の
結合双安定系における相秩序化(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

厚見, 悠

CITATION:

厚見, 悠. スケールフリーネットワーク上の結合双安定系における相秩序化. 京都大学, 2014, 博士(理学)

ISSUE DATE:

2014-03-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k18050>

RIGHT:

学位申請論文

スケールフリーネットワーク上の結合双安定系における
相秩序化

厚見 悠

2013 年 12 月 24 日

要旨

Collective phenomena exhibited by systems consisting of interacting dynamical or stochastic elements have been the subject of significant attention over the past few decades. Such collective phenomena include classical equilibrium phase transitions of microscopic molecules, formation of chemical patterns in reaction-diffusion systems, synchronization transitions of nonlinear oscillators, formation of swarm-like dynamics in self-propelled particles, and opinion formation in social network systems. Various mathematical models of interacting elements that exhibit collective dynamics have been proposed and analyzed, and their theoretical predictions have been confirmed by experiments.

One of the simplest mathematical models of such systems is an ensemble of coupled noisy bistable elements, where each individual element is described by a normal form of the pitchfork bifurcation and is subjected to independent noise. A system of noisy bistable elements that are spatially distributed and diffusively coupled with their nearest neighbors is equivalent to the time-dependent Ginzburg-Landau equation in the continuum limit. It describes the kinetics of a non-conserved order parameter and has been extensively studied in the statistical physics of phase transitions. A system of noisy bistable elements with global, mean-field coupling has also been studied as a simple model of self-organizing systems that exhibit order-disorder phase transitions (Kometani and Shimizu 1975, Desai and Zwanzig 1978, Dawson 1983, Shiino 1987). In particular, Shiino (1987) established the H-theorem for the nonlinear Fokker-Planck equation (NLFPE) describing the system in the continuum limit, thereby ensuring monotonous relaxation of the system into its final stationary states. Frank *et al.* (2001) later extended the H-theorem to NLFPEs that describe more general systems.

Recently, it has been shown that complex networks (Watts and Strogatz 1998, Barabási and Albert 1999), typically characterized by small-world and scale-free properties, are ubiquitous structures of the real-world systems, such as in metabolic networks, neural networks, ecological networks, computer networks, transportation networks, and in social communication networks. Various models of complex networks have been proposed, including the Watts-Strogatz model of the small-world networks and the Barabási-Albert model of the scale-free networks, which reproduce typical characteristics of the real-world networks. Toward understanding of the functional meaning of complex network structures in the real-world systems, dynamical processes on complex networks have also attracted much attention (Barrat *et al.* 2008). In particular, mathematical models of epidemics spreading (Pastor-Satorras and Vespignani 2001) and coupled nonlinear oscillators (Ichinomiya 2004, Boccaletti *et al.* 2006) on complex scale-free networks have widely been studied. It has been shown that the heterogeneous degree distribution of the complex networks is essentially important in understanding the dynamical properties of such network-organized systems. In the theoretical analysis, the mean-field approximation of the scale-free network has been successfully used to explain their dynamical properties.

In this thesis, we analyze a system of diffusively coupled noisy bistable elements on a scale-free random network. This system is described by the following coupled Langevin equations:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = x_i - x_i^3 + \epsilon \sum_{j=1}^N A_{ij}(x_j - x_i) + \xi_i(t) \quad (1)$$

for $i = 1, \dots, N$, where x_i is the state of i -th element, A_{ij} is the adjacency matrix of the network, ϵ is

the coupling intensity, and $\xi_i(t)$ represents Gaussian-white noise of intensity D applied independently to each element. The degree distribution of the scale-free network follows the power law, $r(k) \sim k^{-\gamma}$, where $2 < \gamma \leq 3$, and the minimum and maximum degrees are kept fixed. Models similar to Eq. (1) have been considered in Perc (2008) and in Acebrón *et al.* (2007) regarding stochastic resonance of the network to weak periodic signals, and in Kouvaris *et al.* (2012) regarding traveling and stationary patterns.

By direct numerical simulations, we show that an order-disorder transition, similar to that in globally coupled bistable systems, also takes place in this network-organized system. Namely, the system relaxes either to a statistically symmetric state (disordered) or to an asymmetric state (ordered) with respect to $x = 0$ depending on the parameters ϵ and D . Dependence of the stationary mean field on the noise intensity D near the order-disorder transition point suggests that the transition is continuous with the classical exponent, $1/2$. Using the mean-field approximation of the scale-free network, we also show that the patterns on the network can be fitted by the stable fixed points of the local dynamics of individual bistable elements; under this approximation, each element obeys the following Langevin equation:

$$\dot{x}(t) = x - x^3 + \epsilon k [\bar{x}(t) - x] + \xi(t), \quad (2)$$

where k is the degree of the element and the degree-weighted mean field is given by

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{k_j}{\bar{k}} x_j(t). \quad (3)$$

It is shown that the patterns formed on the network can be fitted by the stable fixed points of the local dynamics Eq. (2) reasonably well. We further show that the phase ordering process takes place consecutively and in order of the degrees, reflecting the strong degree heterogeneity of the scale-free network. Namely, elements with relatively small degrees k form a bimodal distribution in the early stage of the evolution, and then slowly relax and transform into a unimodal distribution consecutively in decreasing order of the degrees. To analyze the phase ordering dynamics of the original network-organized system, we introduce a NLFPE approximately describing the original system under the mean-field approximation of the scale-free network,

$$\frac{\partial P(x, t; k)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\{x - x^3 + \epsilon k [\langle x \rangle(t) - x]\} P(x, t; k)] + D \frac{\partial^2 P(x, t; k)}{\partial x^2}, \quad (4)$$

for the probability density function (PDF) $P(x, t; k)$ of the state x of the element with degree k , where

$$\langle x \rangle(t) = \sum_k \frac{k}{\langle k \rangle} r(k) \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t; k) x dx \quad (5)$$

is the degree-weighted mean field of the network, $r(k)$ is the degree distribution, and $\langle k \rangle$ is the mean degree. By numerical simulations, it is shown that this approximate NLFPE reproduces the stationary properties of the original network system. The relaxation dynamics of the original system is also reproduced reasonably well; the PDF of the elements with relatively small degrees becomes bimodal in the early stage of the evolution and then slowly transforms into a unimodal PDF.

Self-consistency analysis of the stationary solutions of the approximate NLFPE (4), which is similar to that by Shiino (1987) for globally coupled systems, shows that the NLFPE (4) exhibits an order-disorder transition, where the coupling intensity ϵ and the noise intensity D act as bifurcation parameters. By generalizing the arguments by Shiino (1987) and Frank (2001), we can also show that the H-theorem holds for the NLFPE (4), which ensures its monotonous convergence to a stable stationary solution. Namely, we can define a Lyapunov functional I of the PDF $P(x, t; k)$ as

$$I = \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \left[\ln P(x, t; \ell) + \frac{V_0(x)}{D} \right] dx + \frac{\epsilon}{2D\langle k \rangle} \sum_{\ell} \ell r(\ell) \sum_m m r(m) \int \int P(x, t; \ell) P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} dx dy, \quad (6)$$

which decreases monotonously with the evolution of the NLFPE (4) and is minimized when $P(x, t; k)$ reaches the self-consistent solution for all k . These results suggest that an order-disorder transition also takes place in the original network system.

To explain the consecutive relaxation dynamics of the system, we adopt the Kramers' escape rate theory, which tells that the escape time T of an element's state from a less stable fixed point to a more stable fixed point under the influence of noise increases exponentially with the height of the potential barrier V_u , i.e.,

$$T \propto \exp \left(\frac{V_u}{D} \right). \quad (7)$$

Since the potential barrier for the element decreases approximately linearly with the degree k , the relaxation time T of the element with degree k decreases exponentially with k , and this qualitatively explains consecutive relaxation dynamics. The total relaxation time predicted by the escape rate argument agrees with that of the direct numerical simulation of the original network system reasonably well.

In summary, our study reveals the existence of an order-disorder transition and degree-dependent consecutive phase ordering dynamics in a system of noisy bistable elements on the scale-free network. It is shown that the mean-field approximation of the scale-free network and the resulting nonlinear Fokker-Planck equations are effective in understanding the dynamics of the original network system. Though the focus of the present study is on generic dynamical properties of the class of coupled bistable dynamical systems on scale-free networks and not on specific real-world systems, our theoretical findings will be of potential relevance in the analysis of real-world network dynamics.

目次

第 1 章	序	6
1.1	はじめに	6
1.2	背景	6
1.3	本論文の構成	9
第 2 章	結合要素系の研究	10
2.1	従来の結合要素系に関する研究	10
2.1.1	単独の要素のダイナミクスの定式化	10
2.1.2	局所結合系	11
2.1.3	大域結合系	13
2.2	その他のトポロジーを持つ結合要素系の研究	18
2.3	スケールフリーネットワーク上の結合要素系	18
2.3.1	スケールフリーネットワークの構造と構成法	18
2.4	スケールフリーネットワーク上の結合要素系が示す挙動	19
2.4.1	スケールフリーネットワーク上の感染症モデル	19
2.4.2	スケールフリーネットワーク上の結合位相振動子モデル	21
2.4.3	スケールフリーネットワーク上の複素 Ginzburg-Landau モデル	24
第 3 章	スケールフリーネットワーク上の結合双安定系における相秩序化	27
3.1	背景	27
3.2	モデル	28
3.2.1	ノイズが与えられた結合双安定系	28
3.2.2	緩和過程	28
3.3	平均場近似と連続極限	31
3.3.1	平均場近似	31
3.3.2	非線形 Fokker-Planck 方程式	32
3.3.3	確率密度関数の時間発展	32
3.4	定常状態	33
3.4.1	非線形 Fokker-Planck 方程式の定常な確率密度関数	33
3.4.2	秩序 - 無秩序転移	36
3.4.3	非線形 Fokker-Planck 方程式に関する H 定理	37
3.5	緩和過程	38
3.5.1	順序だった秩序化	38

目次	5
3.5.2 遷移率に関する議論	39
3.5.3 系全体の緩和時間	40
3.6 結論および議論	41
3.7 付録 A : 自己無撞着解の存在	43
3.8 付録 B : Lyapunov 関数	46
第 4 章 補遺 : 秩序 - 無秩序転移点近傍でのスケーリング則	51
第 5 章 結論	53
謝辞	55
参考文献	56

第 1 章

序

1.1 はじめに

この論文は、「スケールフリーネットワーク上の結合双安定系における相秩序化」というテーマで著者 厚見悠が研究してきた内容をまとめた学位申請論文である。この論文は、著者が主となって執筆した公表論文 [1] を主な内容とし、これに関連する既往研究や補足説明などが付け加えられて構成されている。以下では、この論文の背景を説明する。

1.2 背景

細胞集団からなる生体組織や、生物の固体群等、多数の要素が集まって集団を形成し、何らかの集団ダイナミクスを生じるような系が、実世界において数多く存在する [2]。このような系は、結合要素系という数理モデルによって描写できる。結合要素系は、内部ダイナミクスを持つ多数の要素が相互作用によってお互いの内部自由度に影響を与え合うというモデルであり、幅広く研究されてきている。結合要素系には、ノイズが与えられない決定論的なモデルと、ノイズが与えられる確率論的なモデルの両方があり、いずれも多くの研究がなされてきている [3–39]。

多くの研究では、相互作用として二体間相互作用のみが扱われている。特に、各要素が格子点上に配置されており、隣接している要素間のみ二体間相互作用が与えられる局所結合系（トポロジーの模式図を図 1.1 a, 図 1.2 に示す。）は、空間分布した要素集団のモデルとして、幅広く研究されてきている。格子間隔が短く要素が空間的に連続分布した場をなしていると考ええる連続極限も、反応拡散系を代表としてよく研究されてきており、様々な時空パターン形成現象などが明らかにされてきた [3–9]。

一方、すべての要素がそれ自体以外のすべての要素との間に相互作用を持つという大域結合系（トポロジーの模式図を図 1.1 b に示す）も、要素間の情報伝達が十分に速い状況のモデルとして、また、局所結合系の平均場近似モデルとして、多くの研究が行われてきており、単純な系であるにもかかわらずさまざまな集団挙動を生じることが明らかにされてきた [10–24]。

さらに、結合要素系の枠組みでは、要素間の結合のトポロジーを任意に設定することで、大域結合系や局所結合系に限らない、多様な系を扱うことできる。近年注目が集まっているのは、結合の構造が「スケールフリーネットワーク」（トポロジーの模式図を図 1.3 A, C に示す）を成している結合要素系である。要素の次数（結合の本数）の分布がべき則に従うスケールフリーネットワークは、その驚くべき普遍性から、様々な観点からの研究において取り扱われてきたネットワーク構造である。

近年の研究により、結合のトポロジーがスケールフリーネットワークである結合要素系が、大域結合や

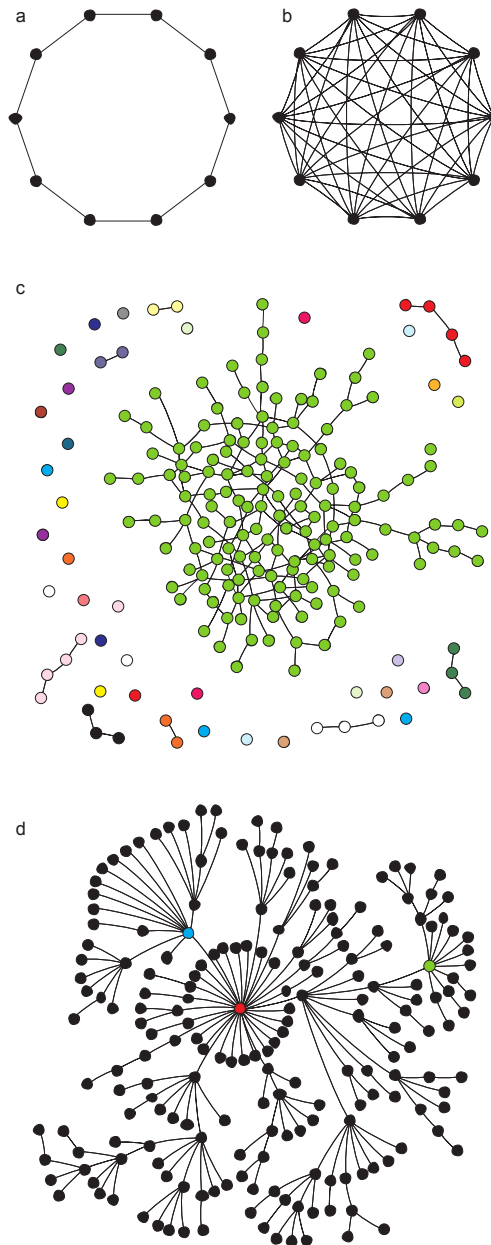


図 1.1 いくつかの規則的またはランダムなネットワークの模式図 ([40] より転載) . **a**: 最近接の要素とのみ結合を持つネットワーク. **b**: 全要素間に結合があるネットワーク. **c**: 全要素間のうちの m 個をランダムに選んで結合したネットワーク (連結ではない) . **d**: スケールフリーランダムネットワークの木.

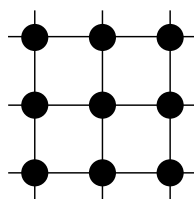


図 1.2 2次元の正方格子を表す模式図.

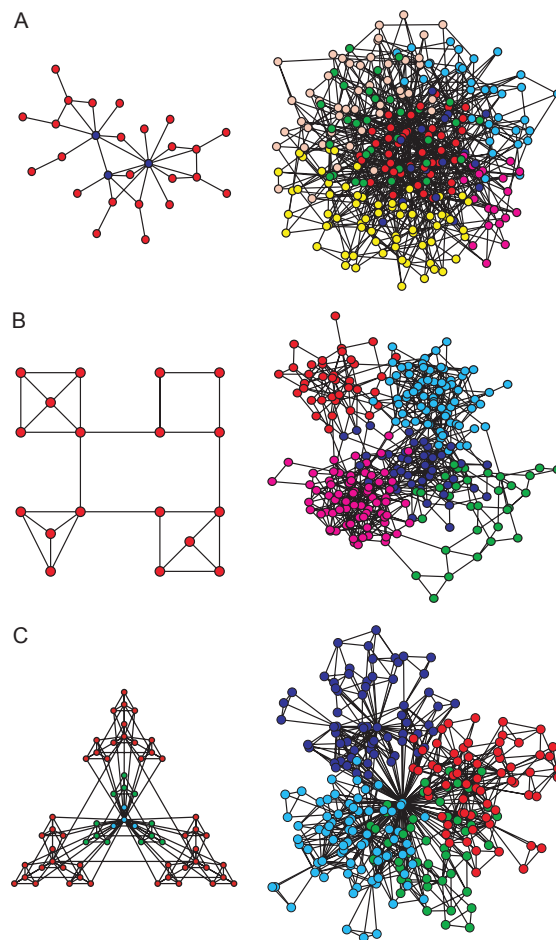


図 1.3 **A**: スケールフリーランダムネットワークの模式図 ([42] より転載) . **B**: コミュニティ構造 (モジュール構造) を持つネットワークを表す模式図. スケールフリー性は持たない. **C**: Ravasz の階層的ネットワークを表す模式図. スケールフリー性および, 平均クラスター係数という指標を大きくする性質を持ち, ランダム性は持たない. それぞれ, 要素数の小さいものと大きいものを並べて表示している.

局所結合を持つ結合要素系と大きく異なる挙動を示すことが明らかにされてきている [27–39]. スケールフリーネットワーク上の結合要素系は, 相互作用項の対称性の乏しさから, それまで知られていた解析方法での理解が困難であった. 一方, スケールフリーネットワーク上の結合要素系に対しては, 平均場近似が良い近似を与える, ということが, 徐々に明らかにされてきた [27–31, 43]. 解析的な取り扱いが容易である平均場近似された系の解析により, 理解が困難であるかのように見えたスケールフリーネットワーク上の結合要素系の挙動の本質が, 明らかにされてきている. 特に, 各要素の次数が重要な役割を果たすことが分かってきている. しかし, スケールフリーネットワーク上の結合要素系の非定常ダイナミクスを扱った研究は未だ少なく, 例えば, 系の緩和過程に関して平均場近似を用いた解析を行っている研究はほとんどない. また, 定常ダイナミクスについても, 平均場近似を用いた解析は特定の少数のモデルに対してのみしか行われておらず, 平均場近似による理解が一般に可能かどうかは明らかにされていない. 本研究の目的のひとつは, 平均場近似を用いたスケールフリーネットワーク上のダイナミクスの解析により, ノイズを受けた双安定系における定常ダイナミクスの理解が可能かを確かめ, さらに, 緩和過程の理解が可能かどうかを明らかにすることである. 著者らの研究では [1], ネットワーク上の各要素の内部ダイナミクスとして, 最も簡単な一次元の双安定系を用い, 各要素に独立に白色ノイズを与える. 大域結合系に

においては、各要素の内部ダイナミクスに同様の双安定系を用い、各要素に独立に白色ノイズを与えた場合、系がノイズ強度をパラメーターとする秩序 - 無秩序転移を示すことが知られている [17,18]. しかし、ネットワーク上の双安定系を扱った研究は未だ少なく、ネットワーク上の系が一般に秩序 - 無秩序転移を示すかは非自明である. これを明らかにすることも、本研究の目的のひとつである.

著者らの研究のひとつの主な成果は、大域結合双安定系において見られた転移が、スケールフリーネットワーク上の双安定系においても見られることを、直接数値計算およびネットワークの平均場近似に基づく非線形 Fokker-Planck 方程式の解析によって示した点である. もう一つの成果は、平均場近似を用い、次数に着目した解析を行うことで、スケールフリーネットワーク上の結合要素系の緩和過程を理解できることを見出した点である. すなわち、十分時間が経った後の定常的な終状態のみに対してではなく、緩和過程に対してもネットワークの平均場近似を適用し、やはり次数が支配的な役割を果たすことを見出した. 著者らの研究のこの成果は、スケールフリーネットワーク上での非定常ダイナミクスを理解するための、ひとつの指針を与えるものと考えられる.

1.3 本論文の構成

まず第2章前半で、古典的な局所結合系・大域結合系の挙動の例を挙げる. 特に、ノイズを受けた局所結合系・大域結合系に着目し、その中でも、本研究の内容と関係の深い大域結合双安定系の性質について詳しく説明する. 第2章後半では、スケールフリーネットワーク上のいくつかの結合要素系の挙動の例を挙げる. これを通じて、スケールフリーネットワーク上の結合要素系に対して、ネットワークの平均場近似を用いた解析を行うことで、次数によって系の挙動を特徴づけることができることを説明する. 第3章は、著者らの公表論文 [1] に基づくものであり、スケールフリーネットワーク上の結合双安定系モデルを取り扱い、緩和過程に対するネットワークの平均場近似を用いた解析の有効性や、スケールフリーネットワーク上の秩序 - 無秩序転移の存在について議論を行う. 第4章では、第3章の公表論文以降に行った転移点近傍での有限サイズスケーリング解析に関する補足事項を述べる.

第 2 章

結合要素系の研究

結合要素系の枠組みでは、要素間の結合のトポロジーを任意に設定することで、実世界の現象を説明するための系や、特定の現象に捉われずに数理的な構造を明らかにするための系など、様々な系を扱うことができる。結合のトポロジーとして古くから中心的に扱われてきたのは、局所結合や大域結合である。一方、要素間の結合がランダム性を持つ結合として、いくつかのランダムネットワークが扱われてきた。

近年、実世界のネットワークの統計的特性が明らかにされてきており、特に、実世界において普遍的に見られるスモールワールドネットワークおよびスケールフリーネットワークに関心が集まってきている。これらのネットワークの機能的意義を理解するために、ネットワークのトポロジーやその構成方法についてのみではなく、これらのネットワーク上の結合要素系のダイナミクスについても、多くの関心が集められてきている。

この章では、局所結合・大域結合・ランダムネットワーク^{*1}・スモールワールドネットワーク・スケールフリーネットワーク、およびこれらをトポロジーに持つ結合要素系に関する研究を、順次紹介する。特に、結合要素系の基礎となる局所結合系・大域結合系と、上記のうち公表論文 [1] と最も関係の深いスケールフリーネットワーク上の結合要素系に関しては、2.1 節と 2.3 節でそれぞれ少し詳しく説明する。ランダムネットワークやスモールワールドネットワークに関する説明は、2.2 節にまとめる^{*2}。

2.1 従来の結合要素系に関する研究

まず結合要素系一般の導入を行い、続いて、古くから多くの研究で扱われてきている局所結合系と大域結合系について説明する。その上で、いくつかの具体的なダイナミクスの例を紹介する。特に、最も簡単な一次元の双安定系を要素の内部ダイナミクスに用いた大域結合系が示す、緩和過程の挙動および秩序 - 無秩序転移について、少し詳しく述べる。

2.1.1 単独の要素のダイナミクスの定式化

まず、単独の要素のダイナミクスを定式化しよう。要素は、自由度 N の内部状態を持つものとし、この内部状態が自励的に変化するものとする。ここで、内部状態は、位置や速度のみではなく、濃度や振動

^{*1} 一部のスモールワールドネットワークや一部のスケールフリーネットワークもランダム性を持つが、ここでは、単にランダムネットワークと書いた場合、スモールワールドネットワークやスケールフリーネットワークではなく、Erdős-Rényi のモデルやレギュラーランダムネットワークなどの古典的なランダムネットワークを指すものとする。

^{*2} スケールフリーネットワークに関する節をこの節より後にしている理由は、ネットワークのトポロジー・構成法の研究や、結合要素系の研究が、後に行われ始めたからである。

の位相などを含む様々な量を表せるものとする。これにより、化学反応や生体リズム現象など、広範な現象にモデルを適用できる。例えば、振動的な化学反応の典型例である Belousov-Zhabotinsky 反応の数値モデルでは、いくつかの化学物質の濃度が内部状態によって表され、振動化学反応のメカニズムに関する議論が行われている。

要素のダイナミクスは、時刻 t における状態を表すベクトルを \mathbf{x} として、

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \quad (2.1)$$

という常微分方程式で表すものとする。ここで、 \mathbf{F} は要素の内部状態を変化させる何らかの駆動力を表す。

どのような現象をモデル化したいか、あるいはどのような抽象モデルを構築したいかによって、内部状態の自由度や駆動力の関数形が定められる。要素のダイナミクスが最も簡単な例の一つとして、以下のような、一次元の双安定系がある。

$$F(x) = x - x^3 \quad (2.2)$$

このモデルは、1 自由度の内部状態が、2 つの安定固定点 $\{-1, 1\}$ のいずれかに緩和する、という挙動を示すものである。これについて、パラメーター a を用いて

$$F = ax - x^3 \quad (2.3)$$

と一般化したものは、 $a < 0$ において 1 つ、 $a > 0$ において 2 つの安定固定点を持つ、ピッチフォーク分岐の標準形として知られている。

現実の系の多くは、外界から不規則な擾乱を受けているものと考えられる。下記のような、ダイナミクスに擾乱が加えられるモデルも、多くの研究において取り扱われている。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) + \boldsymbol{\xi}(t) \\ \langle \boldsymbol{\xi}_i(t) \boldsymbol{\xi}_j(s) \rangle &= 2\hat{\mathbf{D}}\delta(t-s) \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで、 $\boldsymbol{\xi}(t)$ は白色 Gauss ノイズ、 $\hat{\mathbf{D}}$ は要素に与えられるノイズの強度を表す行列である。このような、擾乱を含んだダイナミクスの方程式は、一般に Langevin 方程式と呼ばれる。

2.1.2 局所結合系

以降では結合要素系について考えよう。相互作用には様々なものがありうるが、対称性が高く、応用範囲も広いモデルを考える。ここでは、多くの研究において用いられる、要素間に存在する相互作用がすべて等しい関数形 $\Gamma(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))$ で与えられるモデルを用いる^{*3} ^{*4}。ただし、 $\Gamma(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))$ 内の高々有限個の定数パラメーターの相違は許可する。ここで、添え字 i, j は、個々の要素を区別するための番号を表している。以降、特に記さない限り、要素間に存在する相互作用をすべて等しい関数形 $\Gamma(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))$ で与える。よく用いられる相互作用の関数形のひとつに、拡散的相互作用 $\Gamma(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) = \epsilon(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))$ がある。

^{*3} 各要素が等しい関数形を持つ内部ダイナミクスに従う仮定は、同種の生物集団の挙動や、空間的広がりを持って進行する化学反応の振る舞いなどの、多くの現象のモデル化において自然である。

^{*4} より一般には、結合が存在する要素間ごとに、異なる関数形の相互作用 $\Gamma_{ij}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))$ をとるモデルが考えられる。

特定の要素間のみに相互作用がある系を扱うため、隣接行列 $A = \{a_{ij}\}$ を用いて、ダイナミクスを

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_i(t)}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) + \boldsymbol{\xi}_i(t) \\ \langle \boldsymbol{\xi}_i(t) \boldsymbol{\xi}_j(s) \rangle &= 2\hat{\mathbf{D}}\delta(t-s) \end{aligned} \quad (2.5)$$

と表す。ここで、隣接行列の要素 a_{ij} の値は 0 または 1 をとる^{*5}。 $a_{ij} = 0$ は i, j 間の結合が存在しないことを表し、 $a_{ij} = 1$ は i, j 間の結合が存在することを表す。この隣接行列を変更することで、任意の結合のトポロジーを設定することができる。

さて、具体的なトポロジーについて考えよう。以下ではまず、大域結合系と並んで対称性が高く、古くから多くの研究で扱われてきている、局所結合系を紹介する。局所結合系では、格子上で隣接する要素間のみ相互作用が与えられる。局所結合系の枠組みには、要素が置かれる格子について連続極限をとった系、つまり連続媒質上の系も含まれる。このような連続媒質上の系は、特に拡散的相互作用が与えられる場合、相互作用が空間微分によって記され、ダイナミクスが

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(\mathbf{r}, t)) + \epsilon \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{x}_i(\mathbf{r}, t) \quad (2.6)$$

と表される。ここで、 $\Delta_{\mathbf{r}}$ はラプラシアンを表す。

連続媒質上の系を扱っている研究には、Turing パターン形成の研究 [3] や、回転らせん波の研究 [4] など多くのものがある。また、ノイズを受けた双安定系を内部ダイナミクスとする連続媒質上の系は、時間依存する Ginzburg-Landau 方程式 (TDGL 方程式) として知られている [7-9]。これについて少し詳しく述べよう。

TDGL 方程式は、二次相転移の臨界点近傍の系の挙動を記述するランダウの自由エネルギー ($F/V = F_0 + a(T - T_c)S^2 + BS^4 - hS$) に対して、空間的に非一様な時間発展を扱うための拡張がなされた方程式である。ここで、 S は秩序パラメーター、 F は定常状態において最小化されるポテンシャル関数、 V は系の体積、 a, B は任意の正定数、 T は温度、 T_c は臨界温度、 h は外場を表す。系が空間の非一様性を持つ場合、系の自由エネルギーは以下のように書かれる。

$$F = \int \left[F_0 + a(T - T_c)S^2 + BS^4 - hS + \frac{\epsilon}{2}(\nabla S)^2 \right] d\mathbf{r} \quad (2.7)$$

ここで、 ϵ は界面エネルギーの強さを表す物質定数、 \mathbf{r} は空間座標を表し、 h, S は \mathbf{r} に依存するものとする。この自由エネルギーを持つ系の時間発展は、時間のスケールを無次元化すると、以下の式で表される。

$$\frac{dS(\mathbf{r}, t)}{dt} = AS - BS^3 + \epsilon \nabla^2 S + \xi(\mathbf{r}, t) \quad (2.8)$$

ここで、 $T_c - T = a$ としている。緩和過程を理解するためのシミュレーションの設定として、臨界温度を上回るある温度のもとで系を定常状態にした後に、温度を臨界温度以下に急冷し、新しい定常状態に至る過程を見る、というものがある。この過程は秩序化過程と呼ばれる。秩序化過程を概観すると、3つの段階に分かれていることが確認できる。急冷直後、秩序変数 S はノイズ ξ によって不安定固定点 $S = 0$ から離れていく。界面エネルギーの項があるために、空間上の各点における S は独立に値をとることができず、あるセミマクロな領域 (ドメイン) で近い値をとる。このようにして、まず、界面がランダムに

^{*5} 要素間ごとに値の異なる結合強度 w_{ij} を a_{ij} に乗算するようなモデルも存在する。

分布するドメイン構造が形成される (初期過程) . この後, 系は界面エネルギーを減少させるため, 界面をドメイン間の相互作用によって消滅させ, ドメインを成長させていく (中期過程) . この過程においては, 決定論的な項が支配的であり, ノイズの項の影響は小さくなる. 最終的にひとつの大きなドメインが形成され, ノイズのため秩序変数は多少の幅を持って分布する.

1次元系では, 中期過程においてキルク解・反キルク解 $S_{\pm}(r) = \pm\sqrt{A} \tanh[\sqrt{a}(r - r_0)/\sqrt{2\epsilon}]$ が生じる. 中期過程では, 隣り合うキルクと反キルクが互いに近づいて対消滅する傾向にあるため, 時間とともにドメインが成長していく緩和が見られる. 同様にして, 空間が2次元以上の系の中期過程においても, 時間とともに界面が失われドメインのサイズが大きくなっていく緩和が見られる.

2.1.3 大域結合系

次に, 大域結合系と呼ばれる, 全ての要素が自身を除くすべての要素と相互作用を持つ系を紹介する. 系のダイナミクスは, $a_{ij} = (1 - \delta_{ij})$ として

$$\frac{d\mathbf{x}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^N (1 - \delta_{ij}) \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) + \boldsymbol{\xi}_i(t) \quad (2.9)$$

と表される. ここで, $a_{ij} = (1 - \delta_{ij})$ としたのは, 自身との相互作用を省くためである.

大域結合系は, 様々な結合要素系の中でも, 方程式の対称性が最も高い系である. 特に, 相互作用が拡散的である場合など, 要素間の相互作用が \mathbf{x}_i と \mathbf{x}_j に対して線形な場合に, 全ての要素の方程式が同形になる. これを以下で示そう. 相互作用が拡散的な大域結合系の各要素の発展方程式は, 以下のよう書き下せる.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_i(t)}{dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N (1 - \delta_{ij}) (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)) + \boldsymbol{\xi}_i(t) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)) + \boldsymbol{\xi}_i(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

ここで, ϵ は要素間の拡散係数 (結合強度), N は要素の個数である. これに対し, 平均場を $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j(t) = \mathbf{X}(t)$ とおくと, 式 (2.10) は

$$\frac{d\mathbf{x}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t)) + \epsilon(\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_i(t)) + \boldsymbol{\xi}_i(t) \quad (2.11)$$

と変形でき, 全ての \mathbf{x}_i の発展方程式が同一の形になることが確認できる.

各要素ごとに内部ダイナミクスのパラメーターが異なっている場合においては, すべての \mathbf{x}_i の発展方程式が同形とはならないが, 各要素の従う式における変数が \mathbf{X}, \mathbf{x}_i のみになるため, 解析的な取り扱いがある程度可能になる場合が多い.

このように, 大域結合系は対称性が高いため解析的な議論がしやすく, かつ, 多様な共同現象を生じることから, 多くの研究において扱われてきている. いくつか具体的な研究例を挙げよう. 広く知られているものとして, 大域結合された位相振動子系である Kuramoto モデルが, 固有振動数にばらつきがある場合, 結合強度を転移パラメーターとして同期 - 非同期転移を生じる報告がある. 他にも, 大域結合位相振動子系について, スロースイッチングと呼ばれる, 複数クラスター状態の出現と消滅が繰り返される現象 [12] や, 同期状態と脱同期状態が繰り返される現象 [13] の報告がある (著者は以前の研究において, 外力を受けた大域結合位相振動子系が同期 - 脱同期を繰り返すことを報告している [14]).

Desai と Zwanzig [16] は, Kometani と Shimizu によって導入されたノイズを受けた大域結合双安定系 [15] の緩和過程に関する議論を行っている. 本研究の議論と関係が深いこの議論について, 少し詳しくレビューしよう. Desai と Zwanzig の研究で扱われている発展方程式は以下の Langevin 方程式である.

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= a_i - a_i^3 + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N (a_j - a_i) + \xi_i(t) \\ \langle \xi_i(t) \xi_j(s) \rangle &= 2D \delta_{ij} \delta(t-s) \end{aligned} \quad (2.12)$$

ここで, a_i は各要素の状態である^{*6}. いま, 時刻 t における $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$ の確率密度関数 $g(\mathbf{a}, t)$ を考える. この確率密度関数の時間発展は以下の Fokker-Planck 方程式に従う.

$$\frac{\partial}{\partial t} g(\mathbf{a}, t) + \sum_i \frac{\partial}{\partial a_i} [v_i(\mathbf{a}) g(\mathbf{a}, t)] = D \sum_i \frac{\partial^2}{\partial a_i^2} g(\mathbf{a}, t) \quad (2.13)$$

自由度の大きいこの方程式を直接数値計算で解くのは困難である. 簡単化のため, 時刻 t における各要素の状態 a_i の確率密度関数を $\rho(a_i, t)$, 要素番号 $s+1$ 以上のものを周辺化した確率密度関数を $\rho_s(a_1, \dots, a_s, t) = \int g(\mathbf{a}, t) da_{s+1} \dots da_N$ として, 独立性の近似

$$\rho_2(a_1, a_2, t) \simeq \rho(a_1, t) \rho(a_2, t) \quad (2.14)$$

を導入する. 特に連続極限 ($N \rightarrow \infty$) をとる場合, 独立性の近似を用いることで, 発展方程式を以下の自己無撞着方程式に縮約できる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \{ [\epsilon x(t) - \epsilon - 1] a - a^3 \} \rho &= D \frac{\partial^2}{\partial a^2} \rho \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} a \rho(a, t) da \end{aligned} \quad (2.15)$$

この確率密度関数 ρ のキュムラント展開を考える. つまり,

$$F(\alpha, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(a, t) e^{\alpha a} da \quad (2.16)$$

与えられるモーメント母関数の対数 $\ln F(\alpha, t)$ に対する級数展開

$$\ln F(\alpha, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{n!} \alpha^n \quad (2.17)$$

の展開係数 $M_n(t)$ を考える. ここで, $M_1(t)$ は明らかに平均場 x と等しい.

系の初期条件は, あるパラメーター条件下の定常状態の確率密度関数に定める (緩和過程におけるパラメーター条件を必ずしもこれと等しくする必要はない).

Desai と Zwanzig の研究では, 初期条件・緩和過程のパラメーター条件を様々に変えて, 緩和過程を解析している. ここではその中で最も特徴的な挙動を示す過程を紹介し, 他の過程については割愛する. また, Desai と Zwanzig の研究で議論されている, 独立の近似以外の近似理論についても割愛する.

図 2.1 は, 初期条件においてパラメーターを $D = 4/3, \epsilon = 2$ に定め, 緩和過程においてパラメーターを $D = 1/3, \epsilon = 2$ に定めたときの, 緩和過程の $M_1(t) = x(t)$ および $M_3(t)$ の時間発展である. 実線は

^{*6} この方程式は, より一般の式 $v_i = pa_i - qa_i^3 + (\epsilon/N) \sum_j (a_j - a_i)$ を $pt \rightarrow t', (q/p)^{1/2} \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}'$ と無次元化することで得られる [16].

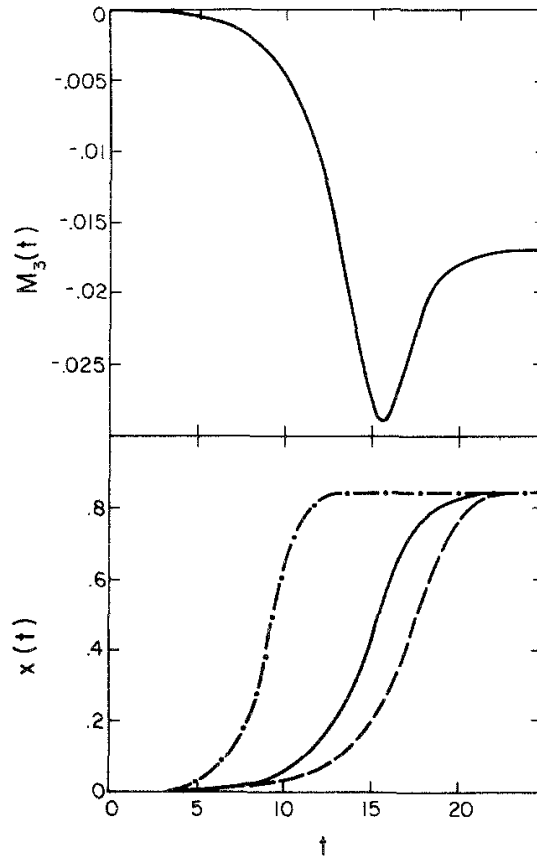


図 2.1 無秩序相から秩序相への緩和過程における $x(t)$ および $M_3(t)$ の時間発展 ([16] より転載) . 実線は数値計算, 破線は Gaussian 近似, 一点破線は $n \geq 3$ の M_3 を無視し M_2 を定数とした近似である. 初期条件は $D = 4/3, \epsilon = 2$ のもとでの安定定常分布, 時間発展の間のパラメーターは $D = 1/3, \epsilon = 2$ に定めている.

数値計算によって得られた値を表している (他の線は近似法によって得られた値を表しているが, 詳しい説明は割愛する). パラメーター $D = 4/3, \epsilon = 2$ の条件下での系の定常状態では, $x = 0$ であり, 確率密度関数が $a \leftrightarrow -a$ について対称になる. すなわち, 系が「無秩序状態」にある. 一方, パラメーター $D = 1/3, \epsilon = 2$ の条件下での系の定常状態では, $x \approx 0.8327$ であり, 確率密度関数が $a \leftrightarrow -a$ について非対称になる. このとき, 系は「秩序状態」にある. これらのことから, 図 2.1 で示す緩和過程は, 無秩序状態から秩序状態に秩序化する過程である.

図 2.1 の x と M_3 を比較すると, x が定常値の $1/2$ にほぼ一致するとき, M_3 が最小値をとることが確認できる. また, 緩和初期の $t \leq 8$ において x と M_3 がほとんど変化しないことも確認できる. 図 2.2 は偶数次のキュムラント展開係数 M_2 と M_4 の時間発展を描写しており, 系の緩和に 3 つの異なる段階があることを示している. 最初の段階では, M_2 と M_4 は急激に変化する. 次の段階では, M_2 と M_4 はほぼ定常である (このとき, 奇数次の係数 x, M_3 は変化速度を速めていく). 最後の段階では, M_2 と M_4 は終状態の定常値に向かって再び値を変化させる. 第 3 次の係数 M_3 が, 最小値をとり, その直後に定常値に向かって値を増加させるのは, この段階である.

Dawson [17] や Shiino [18] は, 要素の確率密度関数の時間発展が式 (2.15) で表される, $N \rightarrow \infty$ の極限における大域結合双安定系について, 秩序 - 無秩序転移に関する議論を行っている. この議論につい

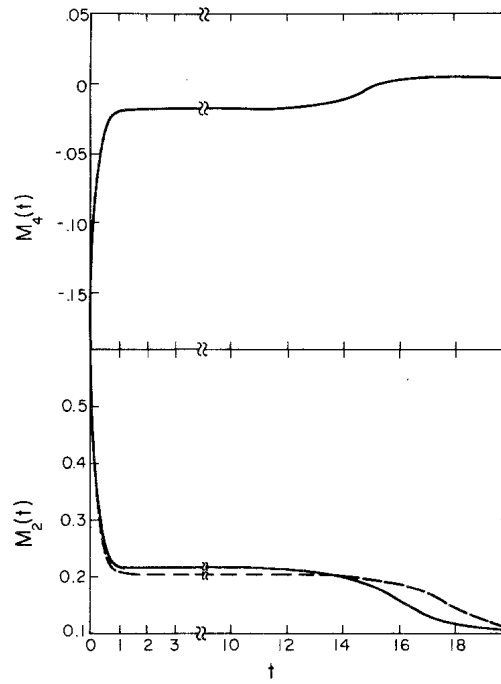


図 2.2 無秩序相から秩序相への緩和過程における $M_2(t)$ および $M_4(t)$ の時間発展 ([16] より転載)．実線は数値計算，破線は Gauss 近似である．初期条件は $D = 4/3, \epsilon = 2$ のもとでの安定定常分布，時間発展の間のパラメーターは $D = 1/3, \epsilon = 2$ に定めている．

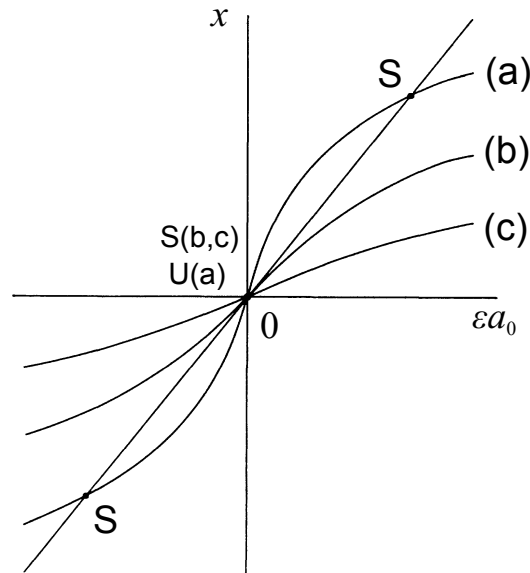


図 2.3 仮定する平均場 (直線) と，それが生み出す分布から再計算される平均場 (式 (2.19), 曲線) を表す模式図．直線と曲線の交点は自己無撞着性を満たす平均場を表している．[(a)-(c)] は ϵ を固定して D を変化させ，典型的な結果を再現したものであり，(a) は $D < D_c$ の秩序相，(b) は $D = D_c$ の臨界点上，(c) は $D > D_c$ の無秩序相を表す．S は安定な自己無撞着解を，U は不安定な自己無撞着解を表す．

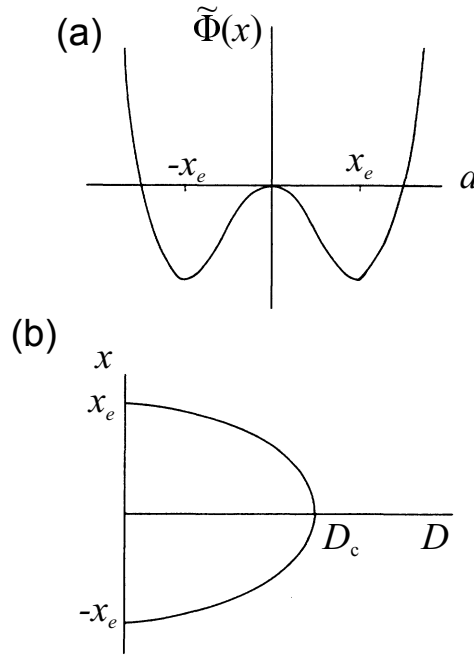


図 2.4 (a) 系のポテンシャルの形状と, (b) 系の平均場のノイズ強度依存性.

でも少し詳しくレビューしよう. Dawson や Shiino は, 安定定常状態の平均場の値に着目することで, 要素の内部状態の分布が, 非対称な分布から対称な分布に変化する系の転移を示している. 式 (2.15) の平均場 x に定数 a_0 を代入すると, 定常状態における確率密度関数 ρ_{st} は以下の式で表される^{*7}.

$$\rho_{\text{st}}(a, a_0) = \frac{\exp \left\{ -\frac{-a^2/2 + a^4/4}{D} - \epsilon \frac{[a - a_0]^2}{2D} \right\}}{\int \exp \left\{ -\frac{-a^2/2 + a^4/4}{D} - \epsilon \frac{[a - a_0]^2}{2D} \right\} da} \quad (2.18)$$

この式より, 平均場が定まれば, 確率密度関数が一意に定まることが確認できる. ここで, a_0 は定常分布 (式 (2.18)) における a の期待値

$$x = \int a \rho_{\text{st}}(a, a_0) da \quad (2.19)$$

と無撞着でなければならない. 図 2.3 は, 式 (2.19) から再計算される平均場 x を, ϵa_0 の関数として, 対角線 $x = a_0$ とともに表示したものである. 平均場 x と a_0 が無撞着性を満たすためには, これらが図 2.3 の曲線と対角線の交点の値をとる必要がある. 図 2.3 の, 曲線と対角線の交点に書かれている記号 S と U は, 安定定常分布の平均場と不安定定常分布の平均場を, それぞれ表している. 平均場 x と a_0 が安定性を満たすためには, これらのうち S の方と一致していなければならない. これより, (a) の場合には平均場を $x \neq 0$ とする安定定常分布が 2 つ (秩序相), (b), (c) の場合には平均場を $x = 0$ とする安定定常分布が 1 つ (無秩序相) 存在することが確認できる. 図 2.4(b) は, 無撞着性と安定性を満たす平均場の, ノイズ強度 D 依存性である. ノイズ強度を変化させることで, 平均場の数およびゼロか非ゼロかが変化するため, ノイズ強度は秩序 - 無秩序転移の転移パラメーターであることが確認できる. このように, $N \rightarrow \infty$ の極限の大域結合双安定系では, ノイズ強度を転移パラメーターとして, 秩序 - 無秩序転移が生じる.

^{*7} Desai と Zwanzig の論文, Dawson の論文, Shiino の論文でそれぞれ記号と使い方が異なるため注意が必要である.

2.2 その他のトポロジーを持つ結合要素系の研究

結合要素系は、大域結合系と局所結合系の他にも、ランダムネットワーク上の系がよく調べられてきている。よく用いられるランダムネットワークとして、Erdős-Rényi のモデルやレギュラーランダムネットワークがある。Erdős-Rényi モデルは、全ての i, j に対して独立ランダムに、 a_{ij} を確率 p で 1 に、確率 $1-p$ で 0 とするものである。このため、次数すなわち要素間の結合の本数には多少の不均一性があるが、以下で詳しく述べるスケールフリーネットワークよりはるかに不均一性が小さい。一方、レギュラーランダムネットワークはすべての要素の次数を等しく定めているランダムネットワークである。

この他に、1998 年に Watts と Strogatz によって提案されたスモールワールドネットワーク [44] や、1999 年に Barabási と Albert によって提案されたスケールフリーネットワーク [45, 46] をトポロジーとして用いている結合要素系が、近年相当数研究されている。次章では、スケールフリーネットワーク上の結合要素系に特有のいくつかの現象と、それらの解析をするために非常に有効であることが理解されつつある平均場近似を用いた解析について紹介する。

2.3 スケールフリーネットワーク上の結合要素系

この章では、スケールフリーネットワーク自体と、スケールフリーネットワーク上の結合要素系やそれが示す現象、それに対する解析について、説明していく。

まず、スケールフリーネットワーク自体およびこれを結合のトポロジーとする結合要素系の定式化を行う。その上で、スケールフリーネットワーク上の結合要素系（および、必ずしも結合要素系の枠組みに含まれない感染症のモデル）に関する典型的な研究例を紹介する。具体的には、スケールフリーネットワーク上の感染症モデル、結合位相振動子系、振幅の自由度を持つ結合振動子系の研究を、それぞれ紹介する。これらの研究内容の説明を通じて、平均場近似によって要素（の方程式）を等しい次数の要素同士のグループに分ける解析方法が、スケールフリーネットワーク上の系の本質を理解する上でどう有効であるかを、詳しく述べていく。

2.3.1 スケールフリーネットワークの構造と構成法

スケールフリーネットワーク自体の特徴や構造を説明するために、まず、ネットワークの特徴量の説明を行う。最も多く用いられる特徴量のひとつは、各要素が持つ他の要素との結合の数（すなわちその要素から出る枝の本数）を表す、「次数」である。要素 i の次数 k_i は、以下の式で表される。

$$k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \quad (2.20)$$

次数の分布 $P(k)$ は、ネットワークの性質を決める重要な関数である。スケールフリーネットワークは、次数分布がべき則 $P(k) \propto k^{-\gamma}$ に従うネットワークである（べき指数 γ には $2 < \gamma \leq 3$ が選ばれることが多い）。次数分布が固定されていても、ネットワークの詳細な構造には任意性がある。同じ次数分布のスケールフリーネットワークについて、詳細な構造（どの要素とどの要素が結合しているか）が規則的なもの（図 1.3 C など）と不規則なもの（図 1.3 A など）の両方が考えられる。以降では、詳細な構造が不規則なものに着目し、単にスケールフリーネットワークと書いた場合には、詳細な構造が不規則であるスケールフリーランダムネットワークを指すものとする。

Barabási と Albert は、次数分布がべきであるスケールフリーネットワークが、自然な仮定に基づく数理モデルによって生成されることを報告している [45]。具体的には、以下のようなモデルを提案している。

- (i) はじめに、頂点が m_0 個の (連結な^{*8}) ネットワークを用意する。
- (ii) $m(\leq m_0)$ 本の枝を持つ頂点を 1 つ新たに追加する。このとき、既存の頂点 i に各枝が結びつく確率はそれぞれ $k_i/(\sum_j k_j)$ であるものとする。すなわち、次数に比例させる。ただし、多重辺は認めない。このような確率分布の仮定は、すでに次数が大きい要素ほどより枝を増やしやすいう状況を表している。
- (iii) 頂点数が N になるまで、(ii) によって頂点を追加する。

この構成法によって作られたスケールフリーネットワークのべき指数 γ は、3 であることが知られている。

一方、人工的な構成法ではあるが、任意の次数分布のランダムなネットワーク (当然、任意のべき指数のスケールフリーランダムネットワークを含む) を構成する方法が知られている。Newman らによって提唱されたコンフィグモデルはそのひとつである [47]。具体的な方法は以下である。

- (i) 要素数 N と次数分布 $P(k)$ を決める。このとき、最大次数は $N-1$ 以下であるものとする。
- (ii) 各要素の次数 k_i を $P(k)$ に従うように定める。
- 各要素が持つ k_i 個の終端同士を、矛盾がないようにランダムに接続する (接続のアルゴリズムは複数考えられる)。

Catanzaro らは、このコンフィグモデルに次数相関があることを報告しており、次数相関を生じさせることなく任意の次数分布のランダムなネットワークを構成する方法を提案している [48]。具体的な構成法は以下である。

- (i) 要素数 N と次数分布 $P(k)$ を決める。このとき、最大次数は \sqrt{N} 以下であるものとする。
- (ii) 各要素の次数 k_i を $P(k)$ に従うように定める。このとき、各要素の持つ k_i 個の終端に対し、それぞれ E_j , ($j = \{1, \dots, M\}, M = \sum_i k_i$) と番号をふる。
- (iii) 枝を $M/2$ 本生成し、各枝の両端を、 E_j から重複がないようにしながらランダムに選ぶ。

2.4 スケールフリーネットワーク上の結合要素系が示す挙動

スケールフリーネットワーク上の結合要素系が、その次数分布を反映した様々な現象を示すという報告が、多くの研究によってなされている。ここでは特に、平均場近似によって巨視的な性質が明らかにされた研究例について紹介する。

2.4.1 スケールフリーネットワーク上の感染症モデル

平均場近似によって、要素を等しい次数のもの同士のグループに分けることで、スケールフリーネットワーク上の系に特有の現象を効果的に説明した初めての例は、Pastor-Satorras と Vespignani による感染症のモデルに関する研究である [43]。感染症のモデルは、式 (2.5) とは異なり、時間および要素の状態

^{*8} 連結とは、ネットワークが、間に結合が存在しない 2 つ以上のコンポーネントに分かれていないことを指す。

が離散的であり、しかも要素の取りうる状態が2値のみとなっているため、この論文で定義した結合要素系に括られることは少ない。しかし、平均場近似によってスケールフリーネットワーク上の系を効果的に理解した先駆的な研究であるため、詳しく説明する。

Pastor-Satorras と Vespignani によるスケールフリーネットワーク上の感染症モデルは、以下のよう
に定式化される。まず、Barabási と Albert の方法 [45] に従ってスケールフリーネットワークを構築す
る。各要素は、「健常」、「感染」の2状態のみを取るものとする。時間発展のアルゴリズムは以下のよう
に定める。

- (i) 初期に、ネットワーク上の要素のうちの半数をランダムに選び、感染状態とする。
- (ii) 各タイムステップにおいて、全ての感染状態の要素は、隣接する健常状態の要素を確率 ν で感染
状態へ変えるとともに、確率 δ で自分自身を健常状態へと回復させる。
- (iii) (ii) を繰り返す。

この (i)-(iii) の時間発展アルゴリズムは、SIS モデルとして知られている^{*9}。ここにおいて、実効拡散率
 λ を $\lambda = \nu/\delta$ と定める。ここで、適当なリスケールにより $\delta = 1$ とできる（これにより、 $\lambda = \nu$ になる）。

スケールフリーネットワークではない古典的な Erdős-Rényi ネットワーク上の感染症モデルでは、
 λ がある有限の閾値 λ_c 以上のときに、終状態においてある有限の割合の要素が感染状態になり（蔓
延）、 λ が閾値 λ_c 未満のとき、終状態においてすべての要素が健常状態になる（全回復）。これに対し
Pastor-Satorras と Vespignani は、要素数・最大次数無限大の極限において、実行拡散率の大小に関わ
らず常に系が感染症の蔓延状態になる、ということを示唆する実データと数値シミュレーション結果を幾
つか示している。

Pastor-Satorras と Vespignani は、これを理解するために、要素数無限大の極限の系に対して平均場
近似を用いて、要素を等しい次数同士のグループに分け、解析を行っている。この解析について説明し
よう。

まず、全要素のうち感染状態にあるものの割合を ρ ，ある次数 k の要素のうち感染状態にあるもの
の割合を ρ_k とおく。このとき、隣接する頂点のうちの1つ以上が感染している確率を、平均場 $\Theta(\lambda)$ に
よって表すことができるものとする。と、 ρ_k の発展方程式は

$$\frac{d\rho_k(t)}{dt} = -\rho_k(t) + \lambda k(1 - \rho_k(t))\Theta(\lambda) \quad (2.21)$$

と表すことができる。ここで、右辺第一項は1タイムステップあたりの回復する要素の平均個数を表し、
右辺第二項は1タイムステップあたりの他の要素から感染させられる要素の平均個数を表す。右辺第二
項は次数 k に比例している。

このように、平均場近似が成立するという仮定のもとでは、要素を次数が等しいもの同士のグループに
分けることで、トポロジーの詳細を無視して要素の時間発展を近似計算することができる。感染状態にあ
るものの割合を次数ごとに ρ_k で表したのは、このためである。さて、平均場 $\Theta(\lambda)$ は、次数 k の要素が
他の要素から隣接する要素として選ばれる確率が、次数 k に比例することから、式

$$\Theta(\lambda) = \frac{\sum_k k P(k) \rho_k}{\sum_s s P(s)} \quad (2.22)$$

^{*9} 感染症の時間発展アルゴリズムには、他には SIR モデルなどがある。SIR モデルにおいては、各要素は健常状態、感染状態
の他に、既回復状態を取る。感染状態の要素は、確率 δ で既回復状態という健常状態とは別の状態に変化し、一度既回復状
態になった要素はそれ以降状態を変化させない。

で表すものとする．ここで、 $P(k)$ は、 $\sum_k P(k) = 1$ と規格化された、次数 k の要素の割合である．十分時間がたったのちに ρ_k が一定になると仮定すると、式 (2.21) から

$$\rho_k = \frac{k\lambda\Theta(\lambda)}{1 + k\lambda\Theta(\lambda)} \quad (2.23)$$

が得られる．Barabási と Albert の方法で構築したネットワークにおいては、 $P(k)$ は具体的に

$$P(k) = 2m^2/k^3 \quad (2.24)$$

と表される．これを式 (2.22) に代入し、さらに k が連続であると近似すれば、 Θ を具体的に

$$\Theta(\lambda) = \frac{e^{-1/(m\lambda)}}{\lambda m} (1 - e^{-1/(m\lambda)})^{-1} \quad (2.25)$$

と表すことができる．これより、全要素の平均感染率 $\rho = \sum_k P(k)\rho_k$ は

$$\rho = 2e^{-1/(m\lambda)} + \text{h.o.t.} \quad (2.26)$$

と表される．この結果は、数値計算で示唆された、任意の λ において系が蔓延状態になるという帰結を、解析の上でも示唆するものである．

このように、平均場近似を用いてトポロジーの詳細を無視し、次数ごとに要素を一括りにして扱う手法は、一見複雑に見えるスケールフリーネットワーク上の系のマクロな性質を捉える上で、有用である．

2.4.2 スケールフリーネットワーク上の結合位相振動子モデル

Ichinomiya の研究では、Kuramoto モデルをスケールフリーネットワークのトポロジーに拡張したものが扱われている [27]．Ichinomiya は、この系について、要素数が無限大の極限 (連続極限) のとき、同期-非同期転移が生じる臨界結合強度がゼロの極限になることを報告している．

Ichinomiya の研究で扱われているモデルを、具体的に説明しよう．まず、結合のトポロジーは、べき指数 $2 < \gamma \leq 3$ の次数分布 $P(k) \propto k^{-\gamma}$ に従うように与える．ただし、数値シミュレーションは $\gamma = 2.5$ についてのみ行う．考える各要素の状態は、振動の位相を表す $\theta_i \in [0, 2\pi)$ の 1 自由度のみである．これは、相互作用が十分に弱い場合、終状態がリミットサイクルである振動子モデルの時間発展が、1 自由度の位相のみによって十分表現されるという、Kuramoto の縮約理論に基づいている．要素の発展方程式は以下のように定める．

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + K \sum_j a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (2.27)$$

ここで、 K は結合の強さを表す拡散定数であり、 ω_i は振動子 i の固有振動数である．固有振動数 ω_i は、分布 $N(\omega)$ から i ごとに独立ランダムに生成する．簡単のため $N(\omega) = N(-\omega)$ であるとする．以下では、連続極限において、系の同期 - 非同期転移の臨界結合強度 K がゼロの極限になることを示す解析について、説明しよう．

この解析では、後述する同期度 r が結合強度によらず常に非ゼロであることを示すことによって、 $K > 0$ ならば系が常に同期相にあることを説明する．連続極限においては、要素の状態は状態の確率密度関数によって表される．確率密度関数が次数および固有振動数ごとに定まるものと仮定し、次数 k 、固有振動数 ω の要素の位相が時刻 t において θ である確率を $\rho(k, \omega; t, \theta)$ で表す．ここで、 ρ は以下のよ

うに規格化されているものとする。

$$\int_0^{2\pi} \rho(k, \omega; t, \theta) d\theta = 1 \quad (2.28)$$

また、系はある定常状態に収束し $\partial\rho/\partial t = 0$ になるものと仮定する。今、 ρ の発展方程式は連続の式 $\partial\rho/\partial t = \partial(\rho v)/\partial\theta$ から得られる。ここで、 v は式 (2.27) の右辺によって規定される、要素の確率密度の流量である。感染症のモデルの場合と同様、次数 k の要素が隣接する要素に選ばれる確率が k に比例するものとする、発展方程式は

$$\frac{\partial\rho(k, \omega; t, \theta)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\theta} \left[\rho(k, \omega; t, \theta) \left(\omega + \frac{Kk \iiint N(\omega') P(k') k' \rho(k', \omega'; t, \theta') \sin(\theta - \theta') d\omega' dk' d\theta'}{\int P(k') k' dk'} \right) \right] \quad (2.29)$$

と表される。ここで、次数についても近似的に連続極限をとっている。いま、同期度 (r, ψ) を以下のように定める。

$$re^{i\psi} = \frac{\iiint N(\omega) P(k) k \rho(k, \omega; t, \theta) e^{i\theta} d\omega dk d\theta}{\int P(k) k dk} \quad (2.30)$$

これは、要素数が有限の系において $r = \sum_j r^{i\theta_j} / N$ と表される同期度、特に要素数が有限のスケールフリーネットワーク上の系において近似的に $\sum_j k_j e^{i\theta_j} / \sum_j k_j$ と表される同期度の、連続極限版である。ここで、近似的な同期度は、感染症モデルの平均場と同様の理由から、要素の次数 k_j で重みづけして和をとっている。同期度を表す、秩序パラメーターの絶対値 r は、つねに $0 \leq r \leq 1$ であり、系が完全に非同期であるとき $r = 0$ である。

式 (2.30) を式 (2.29) に代入すると、

$$\frac{\partial\rho(k, \omega; t, \theta)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\theta} \{ \rho(k, \omega; t, \theta) (\omega + Kkr \sin(\psi - \theta)) \} \quad (2.31)$$

が得られる。これより、安定定常状態において以下の式が満たされることが確認できる。

$$-\frac{\partial}{\partial\theta} \{ \rho(k, \omega; t, \theta) (\omega + Kkr \sin(\psi - \theta)) \} = 0 \quad (2.32)$$

相互作用項に k が掛けられていることを除けば、式 (2.32) が大域結合の Kuramoto モデルの定常状態が満たす式と等価であることから、解は Kuramoto モデルの場合と同様に

$$\rho(k, \omega; \theta) = \begin{cases} \delta\left(\theta - \arcsin\left(\frac{\omega}{Kkr}\right)\right) & \text{if } \frac{|\omega|}{Kkr} \leq 1 \\ \frac{C(k, \omega)}{|\omega - Kkr \sin \theta|} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.33a)$$

$$\quad (2.33b)$$

であるものと仮定する。ここで、 $C(k, \omega)$ は規格化係数である。ここでは Kk が実効的な結合強度になっている。式 (2.33b) を式 (2.30) に代入すると、 r は

$$r = \frac{\iiint N(\omega) k P(k) \rho(k, \omega, \theta) e^{i\theta} d\omega dk d\theta}{\int k P(k) dk} \quad (2.34)$$

と書き表される。ここで、 ω についての積分を

$$\int N(\omega) \rho(k, \omega, \theta) d\omega = \int_{-Kkr}^{Kkr} N(\omega) \rho(k, \omega, \theta) d\omega + \int_{-\infty}^{-Kkr} N(\omega) \rho(k, \omega, \theta) d\omega + \int_{Kkr}^{\infty} N(\omega) \rho(k, \omega, \theta) d\omega \quad (2.35)$$

と分解したとき、 $\omega < -Kkr$ の寄与と $\omega > Kkr$ の寄与の和は $N(\omega) = N(-\omega)$ の条件下においてはゼロである。なぜなら、

$$\left(\int_{-\infty}^{-Kkr} N(\omega) \rho(k, \omega, \theta) d\omega + \int_{Kkr}^{\infty} N(\omega) \rho(k, \omega, \theta) d\omega \right) e^{i\theta} = \int_{Kkr}^{\infty} N(\omega) e^{i\theta} C(k, \omega) \times \left(\frac{1}{\omega - Kkr \sin \theta} + \frac{1}{\omega + Kkr \sin \theta} \right) d\omega \quad (2.36)$$

が成立し、この右辺を θ で積分すると積分値がゼロになるからである。これより、式 (2.34) が、以下の式と等価であることが確認できる。

$$r = \frac{\int \int_{-Kkr}^{Kkr} N(\omega) k P(k) \exp(i \arcsin(\frac{\omega}{Kkr})) d\omega dk}{\int k P(k) dk} \quad (2.37)$$

ここで $\arcsin(\frac{\omega}{Kkr})$ の取りうる範囲が $[-\pi/2, \pi/2]$ であるものとする、以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned} r \int k P(k) dk &= \int \int_{-Kkr}^{Kkr} N(\omega) k P(k) \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{Kkr}\right)^2} = \int \int_{-1}^1 k P(k) N(Kkr\omega') \sqrt{1 - \omega'^2} Kkr d\omega' dk \\ &= Kr \int_{-1}^1 k^2 P(k) \int N(Kkr\omega') \sqrt{1 - \omega'^2} d\omega' dk \end{aligned} \quad (2.38)$$

ここで、もし $r \neq 0$ であるならば、さらに

$$\int k P(k) dk = K \int k^2 P(k) \int_{-1}^1 N(Kkr\omega') \sqrt{1 - \omega'^2} d\omega' dk \quad (2.39)$$

が得られる。いま、この式の右辺を $f(r)$ と置き、これと r に依存しない左辺との大小を比較することで、同期解の存在を調べる。まず、 $r = 1$ において $f(r) \leq \int k P(k) dk$ であることが、以下の変形によって確かめられる。

$$\begin{aligned} K \int k^2 P(k) \int_{-1}^1 N(Kkr) \sqrt{1 - \omega'^2} d\omega' dk &\leq K \int k^2 P(k) \int_{-1}^1 N(Kkr\omega') d\omega' dk \\ &\leq K \int k^2 P(k) \frac{1}{Kkr} \int_{-\infty}^{\infty} N(\omega'') d\omega'' dk \\ &= \frac{\int k P(k) dk}{r} \end{aligned} \quad (2.40)$$

ここで、 $\int_{-\infty}^{\infty} N(\omega) d\omega = 1$ を用いた。これより、関係 $f(r) > \int k P(k) dk$ が満たされることが、式 (2.39) が $0 < r \leq 1$ に解を持つ十分条件であると確認できる。この $f(r) > \int k P(k) dk$ は、以下の式と等価である。

$$\frac{KN(0)\pi \int k^2 P(k) dk}{2 \int k P(k) dk} > 1 \quad (2.41)$$

これは、系が同期解を持つための十分条件である。着目すべきは、 $2 < \gamma \leq 3$ において、任意の結合強度 $K(>0)$ で同期状態が存在するという点である ($\int k^2 P(k) dk / \int k P(k) dk$ が発散することから確かめられる)。この、任意の結合強度において同期解が存在するという結果から、 $N \rightarrow \infty, k_{\max} \rightarrow \infty$ の極限では、同期 - 非同期転移の臨界結合強度がゼロの極限であることが示された。

2.4.3 スケールフリーネットワーク上の複素 Ginzburg-Landau モデル

2009 年には、時間変化するような終状態に対する平均場近似の解析についても、報告がなされている [30]. Nakao と Mikhailov の、スケールフリーネットワーク上の複素 Ginzburg-Landau (CGL) モデルを扱う研究では、周期解やカオス解などの終状態に対しても平均場近似による解析を行っている. CGL モデルは、Hopf 分岐によって定常解が振動解に変化した直後の系を一般に記述する Stuart-Landau モデルに、相互作用項を付け加えたものである. CGL モデルは、振動子モデルを縮約しているという点において Kuramoto モデルと類似しているが、こちらは位相のみではなく振幅も考慮しているため、方程式が少し複雑になる反面、(Hopf 分岐点近傍に限られるものの) 振幅効果の現れる現象を扱うことができる.

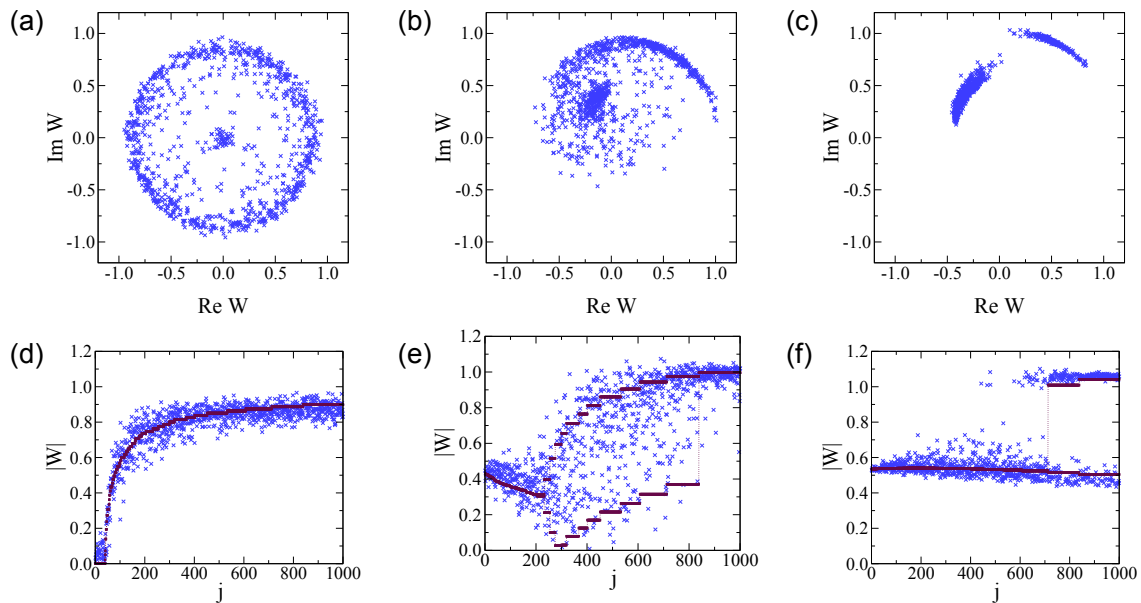


図 2.5 [(a)-(c)] 複素振幅 W_j を複素平面上に表示したスナップショット. [(d)-(f)] 要素番号 j を横軸にして振幅 $|W_j|$ を表示したスナップショット. 結合強度は $K = 0.02$ ((a) と (d)), $K = 0.04$ ((b) と (e)), $K = 0.08$ ((c) と (f)) である. 要素番号を次数が大きい順にソートしているため $k_1 \geq k_2 \geq \dots k_N$ が成り立つ. [(d)-(f)] における青の実線は平均場近似が示す平均場である.

CGL モデルは以下のような発展方程式で書かれる.

$$\dot{W}_j(t) = (1 + ic_0)W_j - (1 + ic_2)|W_j|^2W_j + K(1 + ic_1)\sum_{k=1}^N L_{jk}W_k \quad (2.42)$$

ここで、 W_j は要素 j の振動の位相と振幅を表す複素振幅、 c_0, c_1, c_2 は系のダイナミクスを定める任意の定数である. また、右辺第三項は要素間の相互作用を表しており、 L_{ij} は結合行列の要素である. この方程式は終状態として、部分振動停止解（振動解）、カオス解、複数クラスター解（振動解）などを生じる.

図 2.5 は、(a) が部分振動停止解、(b) がカオス解、(c) が複数クラスター解を、それぞれ表している. ここで、ダイナミクスのパラメーターは $c_0 = 0, c_1 = -2, c_2 = 2$ に定めている. Nakao と Mikhailov の研究では、これらの解に対して平均場近似を用い、解の性質を詳しく解析している. 系全体の平均場 H

は、以下のように表される.

$$H(t) = \frac{\sum_{j=1}^N k_j W_j(t)}{\sum_{j=1}^N k_j} \quad (2.43)$$

これを用いて、系の時間発展についての平均場近似式は、

$$\dot{W}_j(k) = (1 + ic_0)W_j - (1 + ic_2)|W_j|^2 W_j + k_j K(1 + c_1)\{H(t) - W_j\} \quad (2.44)$$

と表される. 図 2.5 のパラメーターを用いる場合、平均場 H の実部・虚部は、部分振動停止解が生じる $K = 0.02$ の場合ではゼロ付近の値を維持し、カオス解が生じる $K = 0.04$ の場合や、2 クラスタ解が生じる $K = 0.08$ の場合では、厳密または近似的に正弦関数型で時間変化する. 大域結合の場合を扱う既存の研究によると [24], カオス解が生じる条件下において N が十分大きいとき、平均場の実部・虚部が近似的に正弦関数型で変化する、と予想されている. また大域結合の場合で、クラスタ解が生じる条件下において N が十分大きいとき、平均場の実部・虚部が厳密に正弦関数型で変化的ことが分かっている. このため、周期的な変化を分離して、平均場を $H(t) = B \exp(i\Omega t)$ とおく. これに対応して、複素振幅を $W(t) = V(t) \exp(i\Omega t)$ とおく. これらを用いた記述は、回転座標系を用いた記述と等価である. すると、変換された複素振幅 V に関する以下の方程式が得られる.

$$\dot{V}(k) = [1 + i(c_0 - \Omega)V - (1 + ic_2)|V|^2 V + k_j K(1 + c_1)(B - V)] \quad (2.45)$$

ここで、平均場近似下においては、すべての要素が実効的な結合強度 $k_j K \simeq \beta$ のみが異なる同じ関数形のダイナミクスに従うことから、発展方程式から要素番号 j を取り除いている.

図 2.6 [(b),(e),(h)] は、平均場近似下の発展方程式 (2.44) における $|W|$ の最大値・最小値 ($|V|$ の最大値・最小値と等しい) を数値計算して、 β ごとに表示したものであり、各要素の複素振幅の、平均場からの相対位置が、要素の次数ごとに異なる軌道へと制限されることを示唆している. 実際、元のネットワーク系における各要素の複素振幅の絶対値 $|W_j|$ は、平均場近似下において見積もった $|W|$ とよく一致している. このことは、元の系の $|W_j|$ および平均場近似下で見積もった $|W|$ を、次数でソートした要素の番号 j を横軸にしてプロットした図 2.6 [(c),(f),(i)] から確認できる.

Nakao と Mikhailov [31] は、スケールフリーネットワーク上のチューリング不安定性についても研究を行っている. この研究においても、平均場近似を用いて、要素を等しい次数同士にグループ分けしており、この方法を用いた解析によって、現象の本質を説明している.

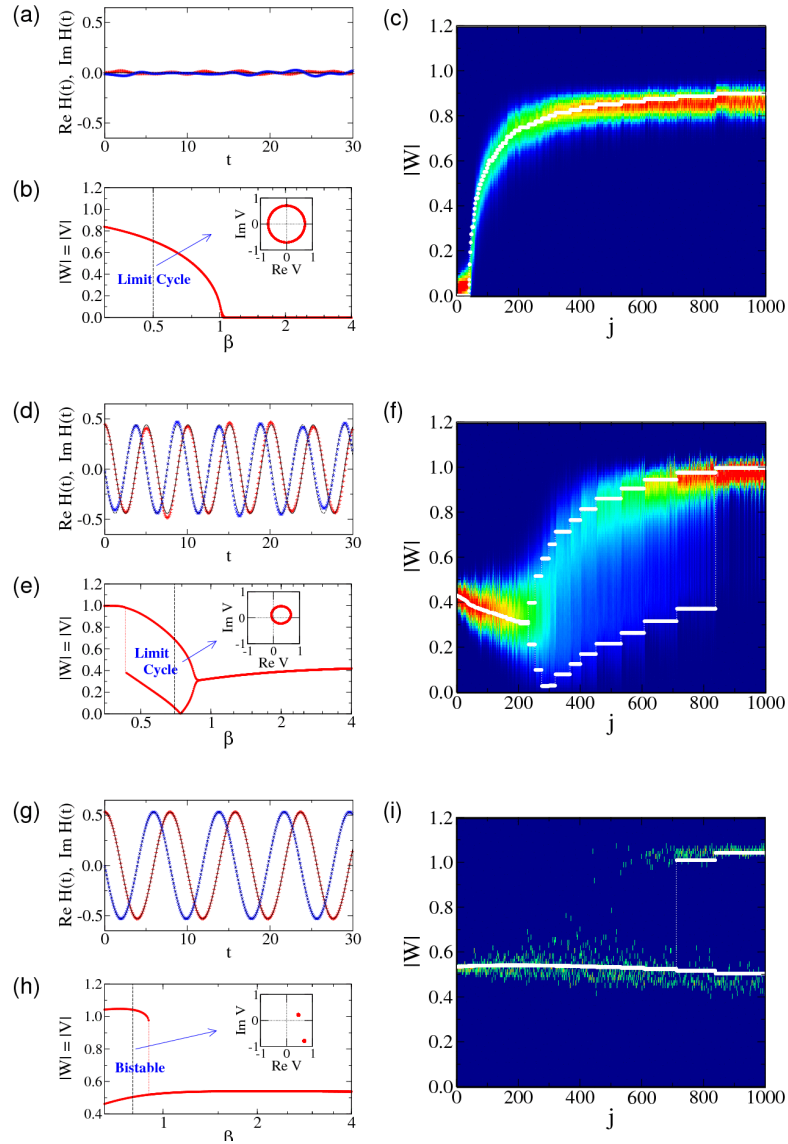


図 2.6 [(a),(d),(g)] 平均場 $H(t)$ の実部 (赤の丸) と虚部 (青の十字) の時間発展および、 $B \exp(i\Omega t)$ によるフィッティング. [(b),(e),(h)] 振動子の周期軌道の分岐図. 中の図は、縦の破線で示された β における $V(t)$ のリミットサイクル軌道または固定点を表す. [(c),(f),(i)] $|W_j|$ の確率密度関数 (赤は高密度, 黄色は低密度, 白は密度ゼロ) と平均場近似下の $|W_j|$ の比較. 青の実線は平均場近似下の複素振幅 $|W_j|$ の最大値および最小値を表す. パラメータは $K = 0.02, B = 0$ [(a)-(c)], $K = 0.04, B = 0.442, \Omega = -1.25$ [(d)-(f)], $K = 0.08, B = 0.532, \Omega = -0.796$ [(g)-(i)] である.

第 3 章

スケールフリーネットワーク上の結合双安定系における相秩序化

この章は、著者らの研究 [1] の内容に基づくものである。この研究では、ノイズが与えられたスケールフリーネットワーク上の双安定系を扱うことによって、以上で紹介してきた既往研究において解決されていない以下の二つの疑問について、議論を行っている。一つは、ここまで紹介してきた平均場近似を用いる解析が、緩和過程においても有効かどうか、という疑問である。もう一つは、大域結合された双安定系において生じる秩序 - 無秩序転移が、スケールフリーネットワークという複雑なネットワーク上の双安定系においても見られるかどうか、という疑問である。

3.1 背景

相互作用を持った動的・静的な要素集団が構成する系によって生じる協同現象が、数十年にわたって関心を集めてきている [3–9, 11, 16–23, 25–39]。こうした系を表す最も簡単な数理モデルのひとつとして、個々の要素のダイナミクスがピッチフォーク分岐の標準形で与えられ、それぞれ独立にノイズが与えられている、ノイズを受けた結合双安定系がある [7, 16–18]。個々の要素が空間的に配置されており、最近接の要素間のみ拡散的な結合が与えられる場合、系は、非保存の秩序パラメーターの動的変化を記述する、連続極限の時間依存 Ginzburg-Landau 方程式と等価である。ノイズを受けた双安定の要素で構成された大域結合系も、参考文献 [16–18] で詳しく研究されており、秩序 - 無秩序転移を生じることが分かっている。特に、Shiino の研究 [18] は、系の連続極限を表す Fokker-Planck 方程式に関する H 定理を確立しており、系が定常な終状態に向かって単調に緩和することを示している。後に Frank らが [49, 50]、H 定理をより一般の系に拡張している。

この論文では、スケールフリーランダムネットワーク [46] 上で拡散的に結合されたノイズを受けた双安定要素の系について解析している。近年、複雑ネットワーク上の動的過程 (例えば、非線形振動子の同期への転移 [27–30] や、活性・抑制因子系のパターン形成 [31–35]、ノイズを受けた結合双安定系の確率共鳴 [37–39]) において、結合のトポロジーが決定的な役割を果たすことが明らかにされてきている。我々は、ノイズを受けた大域結合双安定系に関する先行研究 [16–18] をネットワーク上の系に一般化し、非自明な秩序化のダイナミクスについて解析する。これにより、系が秩序 - 無秩序転移を生じることや、系の挙動が定常状態に至る緩和過程で次数に大きく依存することを示す。また、ネットワークのダイナミクスを近似的に表す非線形 Fokker-Planck 方程式 (NLFPE) を抽出するために、スケールフリーネットワークについての平均場近似を導入する。NLFPE による近似を用い、定常状態の性質と緩和過程について議

論する。

3.2 モデル

3.2.1 ノイズが与えられた結合双安定系

本研究では、スカラーの状態変数 x がピッチフォーク分岐の標準形 $\dot{x}(t) = x - x^3$ に従うノイズを受けた双安定要素によって構成される、スケールフリーネットワーク上の系を考える。系は、結合された Langevin 方程式によって以下のように表される。

$$\dot{x}_i(t) = x_i - x_i^3 + \epsilon \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i) + \xi(t) \quad (3.1)$$

ここで、 x_i は i 番目の要素の状態 ($i = 1, \dots, N$)、 ϵ は拡散的結合の強度、 $\{a_{ij}\}$ は結合のネットワークを特徴づける隣接行列 (i と j が結合されているとき $a_{ij} = 1$ 、結合されていないとき $a_{ij} = 0$)、 $\xi_i(t)$ は $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$ で $\langle \xi_i(t_1) \xi_j(t_2) \rangle = 2D\delta(t_1 - t_2)\delta_{ij}$ の白色 Gauss ノイズを表す (D はノイズ強度)。要素 i の次数 (結合している他の要素の数) は $k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ と定める。ここでは、コンフィグモデル [47] を使ってスケールフリーランダムネットワークを生成する。ここで、次数分布は $r(k) \propto k^{-\gamma}$ ($2 < \gamma \leq 3$) に従うものとする。ネットワークは、連結、無向 ($a_{ij} = a_{ji}$) であるものとし、自分自身との結合 ($a_{ii} = 0$) は許可しない。数値計算では、最小次数 k_{\min} は 6 に、次数分布のべき指数 γ は 2.5 に固定する*1。

式 (3.1) は、例えば、多数のエージェントが複数のコミュニティを形成している構造における合意形成 [51] や、天然・人工の信号伝達ネットワーク [37, 52–54] の数理モデルになるものと考えられる。他の類似の数理モデルとして、Kouvaris らの進行・定常パターンを示すモデル [35] や、Acebron [37] や Perc ら [38, 39] の、弱い周期外力に対してネットワーク上で確率共鳴を示すモデルがある。

式 (3.1) の結合は、拡散を表す Laplacian のネットワーク版である。また、相互作用の総和 $\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i)$ は、大域結合の場合平均場との相互作用の形 $N(\bar{x} - x_i)$ で表される。ここで、平均場は $\bar{x} = \sum_{j=1}^N x_j / N$ で定められる。ノイズを受けた大域結合双安定系に対して、連続極限 ($N \rightarrow \infty$) 下の NLFPE を用いた解析がなされてきている [16–18]。これにより、系が秩序 - 無秩序転移を示すことが明らかにされてきている。また、H 定理により、系が定常状態に収束することも確かめられてきている [18]。この研究における我々の焦点は、式 (3.1) で与えられるダイナミクスに対する、ネットワークの結合の不均一性がもたらす影響である。

3.2.2 緩和過程

まず、数値計算により、本研究のモデルの典型的な挙動を示す。 $t = 0$ における系の初期条件は、 $x = 0$ 付近の様な狭い分布に定める。すなわち、各 $x_i(0)$ ($i = 1, \dots, N$) を、鋭いピークを持った以下の Gauss 分布から独立ランダムに定める。

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (3.2)$$

ここで、 $\mu = 0.02$, $\sigma = 0.01$ と定める。系を小さな揺らぎに対して過敏にするような、完全に対称な初期条件を避けるため、 μ を正の小さな値に定めている。図 3.1 は時間発展の経過のスナップショットであ

*1 次数 $\gamma = 2.5$ に特別な意味はない。パラメーター ϵ や k_{\min} , k_{\max} , D を適切に選べば、定量的にほとんど同じダイナミクスが $2 < \gamma \leq 3$ で生じる。ただし全体の緩和時間は γ に応じて多少異なる。

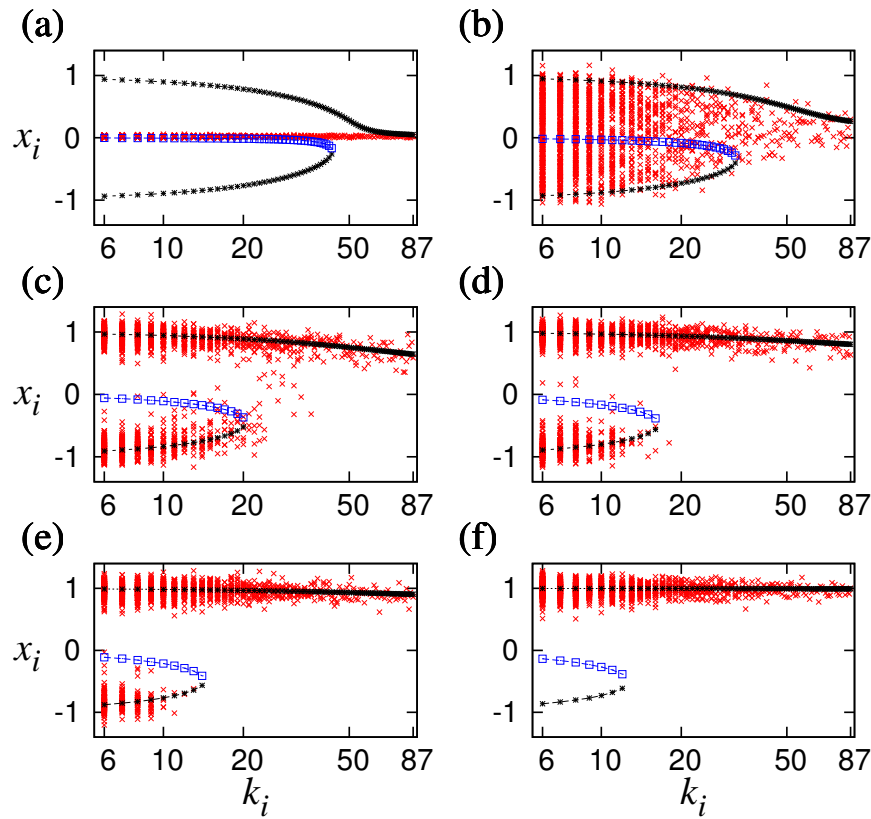


図 3.1 数値計算によって得た、要素の分布の時間発展 (式 (3.1)) を描いたスナップショット．ここで、各図の時刻は、(a) $t = 0$, (b) $t = 2$, (c) $t = 10$, (d) $t = 100$, (e) $t = 500$, (f) $t = 10000$ であり、要素 i の状態 x_i は次数 k_i ($i = 1, \dots, N$) の関数として表示している．黒の星印および青の正方形は、平均場近似下の安定固定点と不安定固定点 (式 (3.6)) を表している．ここで、平均場 $\bar{x}(t)$ は、その時刻の各要素の状態に対して式 (3.5) を用い、計算している．ネットワークのパラメーターは $N = 1800$, $k_{\min} = 6$, $\gamma = 2.5$ ($k_{\max} = 87$ から定まる) である．系のパラメーターは $\epsilon = 0.02$, $D = 0.02$ である．

る．ネットワーク上の各要素の次数 k_i を横軸として、各要素の状態 x_i をプロットしている．このプロットは、複雑なネットワーク上の系の挙動を可視化する上で便利な、次数を一行に並べた表示 [27–31] を実現している．星印と正方形は、平均場近似下の式の固定点を表している．時間 $t = 0$ の分布をわずかな揺らぎを含んだ一様分布に定め、時間発展を始めると、次数の十分小さい要素 (今の条件下では $k_i < 50$) の状態はただちに 2 つに分離する (次数の十分大きい要素 (今の条件下では $k_i > 50$) の状態は分離しない)．系全体としては、初期 ($2 < t < 10$) にピッチフォーク状のパターンを示す．このパターンが生じる理由は、以下のように説明できる．式 (3.1) は局所的な場 $\bar{x}_i(t) = \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j(t)$ を用いて

$$\dot{x}_i(t) = x_i - x_i^3 + \epsilon k_i [\bar{x}_i(t) - x_i] + \xi_i(t) \quad (3.3)$$

と書き換えられる．緩和の十分初期では、全ての要素の状態の絶対値 $|x_i(t)|$ が十分に小さいため、局所的な場は十分小さく、 $\bar{x}_i \approx 0$ であると見なせる．すると、各要素は、近似的に以下の式に従うものと考

えることができる.

$$\dot{x}_i(t) = (1 - \epsilon k_i)x_i - x_i^3 + \xi_i(t) \quad (3.4)$$

これより, $\epsilon k_i < 1$ ($\epsilon = 0.02$ の場合 $k_i < 50$) の要素は二股 (双峰型の分布) に分離し, 一方 $\epsilon k_i > 1$ ($\epsilon = 0.02$ の場合 $k_i > 50$) の要素は分離せずに一股 (単峰型の分布) を維持する.

$k_i < 50$ の要素が二股に分かれたことを受けて, 局所的な場 $\bar{x}_i(t)$ はゼロ付近からずれ, 系のピッチフォーク状の分布は徐々にゆがめられていく. 双峰型分布と単峰型分布の境界となる次数を k_c とすると, この臨界次数 k_c は歪みが大きくなるにつれて減少する (このことは, 後述するように, 平均場がゼロからずれていくことから近似的に説明される). 図 3.1 では, 二股に分離したうちの上側の要素 ($\epsilon k_i < 1$) および一股を維持した要素 ($\epsilon k_i > 1$) が, 素早く移動して上側のグループを形成する様子が見られる ($t = 100$).

少し時間がたつと, 「遅い秩序化」が始まり, 二股に分かれたうちの下側の要素 ($\epsilon k_i < 1$) が緩和していく ($t = 500$). すなわち, これらの要素がゆっくりと 1 つずつ上側に移動し, 上側のグループに加わっていく. 下側のグループに属している要素のうち, 次数が大きいものの方が上側への移動が速く, 次数の小さいものはこの緩和により長い時間を要する. このため, 初期に上下に分離する $\epsilon k_i < 1$ の要素は, 次数の大きいものから順に, $x = 1$ 付近の単峰型の分布に遷移していく.

最終的にはほとんどの要素が上側のグループに加わる ($t = 10000$). つまり, 少数の要素のみが下側に残り, ほぼ上側のグループのみが $x = 1$ 付近に位置して残る. 要素の数が有限であることが理由で, 下側に 1 つも要素が残らない場合も生じうる. 今回のように $\mu > 0$ の場合, ほとんどの試行において最終的に上側のグループだけが残るが, 系が $x \leftrightarrow -x$ について対称であることから, ほぼ下側のグループのみが $x = -1$ 付近に位置して残る場合も生じる.

この図 3.1 の場合, 結合強度 ϵ , 最小次数 k_{\min} , 最大次数 (これは要素数から間接的に決定される) k_{\max} の値が, $\epsilon k_{\min} < 1 < \epsilon k_{\max}$ が満たされるように選んでいる. これは, 初期に単峰型と双峰型の分布が混在するための条件である. このことは, $\epsilon k_i < 1$ においては式 (3.4) の固定点が 1 つしか存在せず, $\epsilon k_i > 1$ においては式 (3.4) の固定点が 2 つ存在することから説明される. パラメーター条件によっては, 緩和の初期に, 全次数において要素の分布が双峰型になる場合や, 全次数において要素の分布が単峰型になる場合もある. 終状態も, 条件によって, 全次数において分布が双峰型になる場合や, 全次数において分布が単峰型になる場合, 双峰型と単峰型が混在する場合がある (他のパラメーター条件下の終状態については, 3.4.1 章でより詳しく述べる).

いずれの場合も, 適切なノイズ強度 D が選ばれれば, 秩序状態に向かう秩序化が起こり, 初期のほぼ対称な状態が崩れていく. 後の章で述べるように, D がある臨界強度 (これを D_c とおく) を上回ると, 秩序化は生じなくなり, $x \leftrightarrow -x$ について対称な終状態の分布が生じるようになる. 緩和に要される時間は, 初期に要素の分布が二股に分離するかどうか, 大きく依存している. 一般に, 初期に全次数において要素の分布が単峰型になる場合には, 緩和が極めて速い. 対して, 初期に全次数において要素の分布が双峰型になる場合には, 緩和時間が極めて長くなる.

3.3 平均場近似と連続極限

3.3.1 平均場近似

系のダイナミクスを理解するために、スケールフリーネットワークの平均場近似と、連続極限とを導入する [27–31, 43, 55]. 次数相関が十分に弱ければ^{*2}, 平均場近似は十分大きいスケールフリーランダムネットワークに対してよく機能することが知られている. 本研究の場合, 系に対する平均場近似の適用は, ネットワークの詳細を無視し, 次数だけを考慮することと等価である. つまり, 個々の要素のダイナミクスにおける局所的な場は, 単純に, 下式に示す大域的な場 (平均場) に置き換えられる.

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{k_j}{\bar{k}} x_j(t) \quad (3.5)$$

ここで, \bar{k} はネットワークの平均次数 $\bar{k} = (1/N) \sum_{j=1}^N k_j$ である. この平均場近似下では, 同じ次数の要素同士が統計的に等しいダイナミクスに従う (これゆえ, 要素を個別に考える必要がなくなるため, 以下では添え字 i を省略する). 具体的には, 次数 $k \in \{k_{\min}, \dots, k_{\max}\}$ を持った要素の状態 x は, 以下の Langevin 方程式に従う.

$$\dot{x}(t) = x - x^3 + \epsilon k [\bar{x}(t) - x] + \xi(t) \quad (3.6)$$

ただし, ノイズ $\xi(t)$ は, $k = k_{\min}, \dots, k_{\max}$ において, 要素ごとに独立にかかっている. 平均場を定数として外から与えると, 式 (3.6) は単にノイズと外場を受けた単独の要素のダイナミクスを表す形になる.

さらに, 平均場の時間変化の方が個々の要素の状態の時間変化と比べ遅いものと仮定すると [27–31], 要素の状態 x は方程式の決定論的部分の固定点付近に滞在するものと予想される. 図 3.1 の星印は, 実際にシミュレーションにおいて計算されたその時間 t の平均場を式 (3.6) の \bar{x} に代入した場合の, 式 (3.6) の安定固定点を表している. 平均場 $\bar{x}(t)$ に依存して定まることから, この各次数の要素の安定固定点も時間変化する. 平均場 $\bar{x}(t)$ の時間変化が十分に遅くなる緩和後半において, この安定固定点群と, 実際に要素が示すパターンとがよく一致していることや, 不安定固定点群が要素を遠ざけるポテンシャル障壁に対応していることが, 図から見て取れる.

各要素にノイズが与えられているため, 要素の状態の分布はより安定な固定点の方に偏る傾向にある. 外から \bar{x} を与えたときの, $-dV/dx = x - x^3 + \epsilon k [\bar{x}(t) - x]$ を満たすポテンシャル関数を, 以下のように入導入する.

$$V(x) = V_0(x) + \epsilon k \frac{[x - \bar{x}(t)]^2}{2} \quad (3.7)$$

ここで, $V_0(x)$ は内部ダイナミクスのポテンシャル関数

$$V_0(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \quad (3.8)$$

である. 以降, より安定な固定点, すなわち式 (3.7) の $V(x)$ を最小にする固定点を $x_g(k)$ と記し, また, 準安定な固定点, すなわち $V(x)$ を極小にする固定点を $x_m(k)$ と記す. 不安定固定点, すなわち $V(x)$ を極大にする固定点は, $x_u(k)$ と記す.

^{*2} コンフィグモデルによって構築したネットワークに若干の次数相関があることが知られている. 本研究では, 従来のコンフィグモデルを用いた場合と, 次数相関を持たないコンフィグモデル [48] を用いた場合の数値計算の結果を比較することで, 上記の次数相関が十分弱く, 平均場近似がよく機能することを確認した.

3.3.2 非線形 Fokker-Planck 方程式

次に、この平均場近似式に対して連続極限 ($N \rightarrow \infty$) を取り、元の系を近似する NLFPE を導出する。元の系の平均場は、以下のように書き変えることができる。

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \left\{ \frac{N(k)}{N} \frac{1}{N(k)} \sum_{j=1}^N \delta(k_j = k) \frac{k_j}{k} x_j(t) \right\} \quad (3.9)$$

ここで、 $\delta(k_j = k)$ は Kronecker のデルタ関数であり、 $N(k) = \sum_{j=1}^N \delta(k_j = k)$ は次数 k の要素の数である。要素数 N が無限大の極限における系の平均場は、状態 x の次数 k および時間 t における確率密度関数 $P(x, t; k)$ によって、以下のように表される。

$$\langle x \rangle(t) = \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{k}{\langle k \rangle} r(k) \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t; k) x dx \quad (3.10)$$

ここで、 $r(k)$ は次数分布 $r(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} N(k)/N$ を、 $\langle k \rangle$ は平均次数 $\langle k \rangle = \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} r(k)k$ を表している。ここでは、元のネットワークに関する平均と区別するために、記号 $\langle \cdot \rangle$ を導入し、これを連続極限の平均を表す記号にあてている。

以上のことから、要素数を $N \rightarrow \infty$ とし次数分布を $r(k)$ とした連続極限における、要素の確率密度関数 $P(x, t; k)$ は、 $k = k_{\min}, \dots, k_{\max}$ においてそれぞれ以下の NLFPE に従う。

$$\frac{\partial P(x, t; k)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\{x - x^3 + \epsilon k [\langle x \rangle(t) - x]\} P(x, t; k)] + D \frac{\partial^2 P(x, t; k)}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

ここで、平均場 $\langle x \rangle(t)$ は式 (3.10) によって与えられる。確率密度関数 $P(x, t; k)$ は k ごとに $\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t; k) dx = 1$ で規格化しており、次数分布 $r(k)$ は $\sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} r(k) = 1$ で規格化している。

3.3.3 確率密度関数の時間発展

図 3.2 は、NLFPE (3.11) を数値計算することによって得た、確率密度関数の時間発展の経過を表すスナップショットである。図 3.1 の結果とよく一致していることが確認できる。パラメーターは図 3.1 のときと同じ条件に設定している。具体的には、次数の分布や範囲を元のネットワーク系と等しくなるように定め ($k_{\min} = 6$, $k_{\max} = 87$ および $\gamma = 2.5$)、 ϵ や D も元の系と等しい値に定めている。各次数における初期条件も、元の系で設定したものと対応するように、式 (3.2) に $\mu = 0.02$ と $\sigma = 0.01$ を代入した、ピークの鋭い Gauss 分布に設定している。

時間発展の開始直後、小さい次数の要素 ($\epsilon = 0.02$ のとき $k < 50$ 、つまり $\epsilon k < 1$ の要素) は、素早く双峰型分布になる。一方、大きい次数の要素 ($\epsilon = 0.02$ のとき $k > 50$ 、つまり $\epsilon k > 1$ の要素) は単峰型を維持する。系全体としては、初期 ($2 < t < 10$) に、ピッチフォーク状のパターンを示す。時間が経過すると、平均場はゼロ付近からずれ ($t = 10$ において $\langle x \rangle \approx 0.40$)、系のピッチフォーク状のパターンは崩れていく。これに伴い、前述の境界の次数 k_c も漸減する。次数が大きいがゆえに分布が単峰型になっていた要素および、次数が小さいゆえに二股に分離した要素のうちの、上側の要素は、素早く $x = 1$ 付近に上側のグループを形成する ($t = 100$)。少し時間がたつと、遅い秩序化が始まり、二股に分離したうちの下側の要素 $k < k_c$ が時間をかけて上側に緩和していく ($t = 500$)。最終的にはほとんどの確率密度関数が上側のグループに加わる ($t = 10000$)。元のネットワーク系と同様に、緩和時間は、初期に確率密

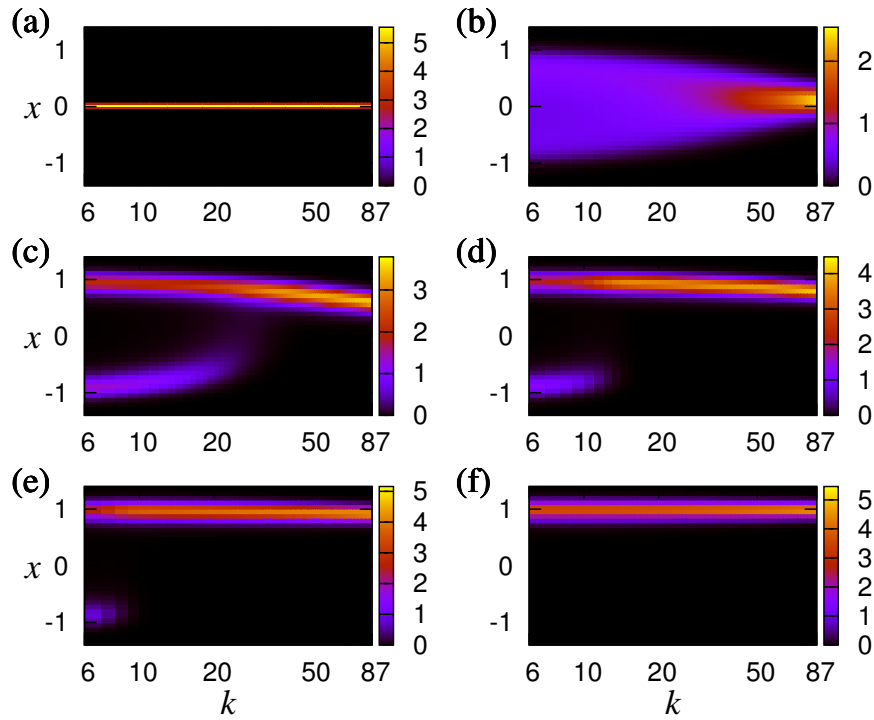


図 3.2 数値計算によって得た、非線形 Fokker-Planck 方程式 (3.11) の確率密度関数 $P(x, t; k)$ ($k = k_{\min}, \dots, k_{\max}$) の時間発展を描いたスナップショット．ここで、各図の時刻は (a) $t = 0$ ，(b) $t = 2$ ，(c) $t = 10$ ，(d) $t = 100$ ，(e) $t = 500$ ，(f) $t = 10000$ であり、 $P(x, t; k)$ の密度はカラーバーが表す色によって描かれている．ネットワークのパラメーターは元の系と等しい値の $k_{\min} = 6$ ， $k_{\max} = 87$ ， $\gamma = 2.5$ である．系のパラメーターも元の系と等しい値の $\epsilon = 0.02$ ， $D = 0.02$ に定めている．

度関数が単峰型になるか双峰型になるかに大きく依存している．単峰型の確率密度関数は、上へ移動して $x \approx 1$ に上側のグループを作ることが比較的速い．一方、双峰型の確率密度関数は、これよりもはるかに長い時間をかけて、単峰型に変化し上側のグループに収束していく．分布が双峰型になる次数の確率密度関数の中でも、次数の大きいものの方が緩和が速く、次数の小さいものの方が収束するまでにより長い時間を要する．これらの結果は、NLFPE による近似方程式が、終状態についてだけではなく緩和過程についても元の系をよく再現することを示唆している．

3.4 定常状態

3.4.1 非線形 Fokker-Planck 方程式の定常な確率密度関数

まず初めに、NLFPE (3.11) の定常状態を確認する．いま、平均場 $\langle x \rangle(t)$ が固定されていると仮定しよう．このとき、NLFPE は k ごとに独立な式に分解することができ、個々の確率密度関数の定常解が

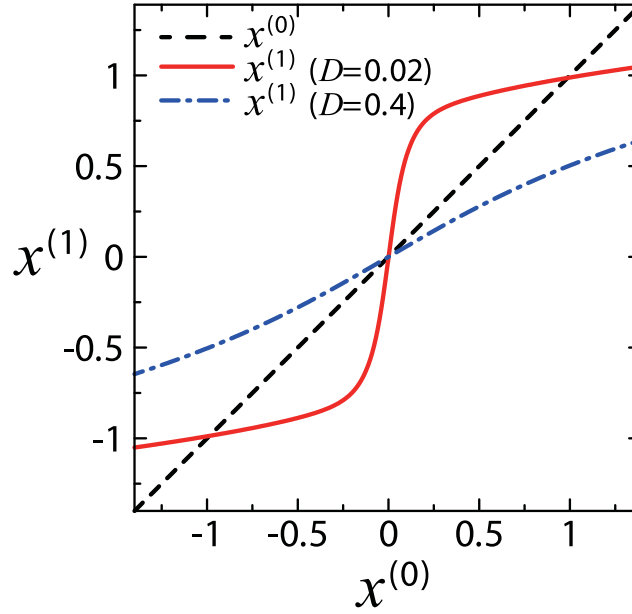


図 3.3 仮定する平均場 $x^{(0)}$ の関数として、式 (3.12) と (3.13) から再計算される平均場 $x^{(1)}$ を表示したもの (ノイズ強度は $D = 0.02 < D_c$ と $D = 0.4 > D_c$)。パラメーターの値は $k_{\min} = 6$ ， $k_{\max} = 87$ ， $\gamma = 2.5$ ， $\epsilon = 0.02$ である。

以下のように求められる。

$$P_{\text{st}}(x; k) \propto \exp \left\{ -\frac{V_0(x)}{D} - \epsilon k \frac{[x - \langle x \rangle]^2}{2D} \right\} \quad (3.12)$$

ここで、平均場に関する無撞着性と定常性が満たされていれば、上記の解は (大域結合の場合 [17, 18] と同様) NLFPE における大域的に安定な定常解である。ここで、最初に固定する平均場を $x^{(0)}$ ，確率密度関数 (3.12) から再計算される平均場を $x^{(1)}$ と置こう。再計算から得られる平均場 $x^{(1)}$ は、以下のよう表される。

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \sum_{k=k_{\min}}^{k=k_{\max}} \frac{k}{\langle k \rangle} r(k) x_k^{(1)} \\ x_k^{(1)} &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{st}}(x; k) x dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

ここで、 $P_{\text{st}}(x; k)$ は、式 (3.12) に $\langle x \rangle = x^{(0)}$ を代入することによって得られる確率密度関数である。再計算から得られる平均場 $x^{(1)}$ は、自己無撞着性の要請から、 $x^{(0)}$ と等しくなければならない。以降、自己無撞着性 ($x^{(0)} = x^{(1)}$) と安定性をともに満たす平均場を x^* と記す。

図 3.3 は、典型的な条件下で、 $x^{(1)}$ を $x^{(0)}$ の関数として表示したものである。自己無撞着性を満たす点は、 $x^{(1)}$ の曲線と対角線との交点として与えられる。条件 $dx^{(1)}/dx^{(0)}|_{x^{(0)}=0} > 1$ が満たされる場合 (図 3.3 の $D = 0.02$ がこれに該当する)，2 つの非ゼロの x^* が存在する。また、条件 $dx^{(1)}/dx^{(0)}|_{x^{(0)}=0} < 1$ が満たされる場合には (図 3.3 の $D = 0.4$ がこれに該当する)，1 つの解 $x^* = 0$ が存在する。これに関して、 $D \rightarrow \infty$ のときに $dx^{(1)}/dx^{(0)}|_{x^{(0)}=0} < 1$ が、 $D \rightarrow +0$ のときに $dx^{(1)}/dx^{(0)}|_{x^{(0)}=0} > 1$ が成立することが一般に示される (付録 3.7 の式 (3.19)，(3.20) および (3.23) を見よ)。従って、 k_{\max} が有限の場合において、 $D < D_c$ では安定かつ自己無撞着な解 x^* が非ゼロの値で 2 つ存在する一方、 $D > D_c$ では 1 つのみの解がゼロの値で存在するような、その点で解の個数

が変化する有限の臨界ノイズ強度 D_c が存在する．言い換えると，ノイズ強度 D が分岐パラメーターの役割を担っている． $x^* = 0$ のときはすべての k において NLFPE の確率密度関数が $x \leftrightarrow -x$ について対称性になり，一方， $|x^*| > 0$ のときは確率密度関数が対称形にはならない．これに基づき，以降では，平均場 $x^* = 0$ を伴って生じる対称な状態のことを「無秩序相」， $|x^*| > 0$ を伴って生じる非対称な状態のことを「秩序相」と記す．これらの結果より，元のネットワーク系においても， $D = D_c$ で秩序 - 無秩序転移が生じることが期待される．

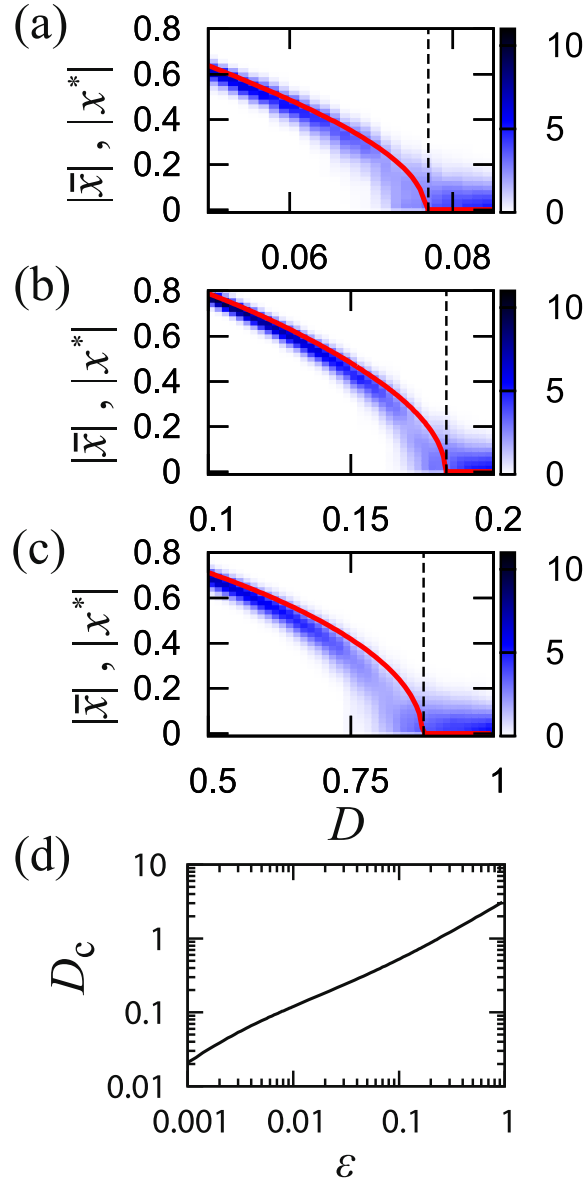


図 3.4 [(a)-(c)] 臨界点近傍における，平均場の分岐パラメーター D 依存性．結合強度は，(a) $\epsilon = 0.005$ ，(b) $\epsilon = 0.02$ ，(c) $\epsilon = 0.2$ である．カラーバーの表す色で描かれた表示は，各 $x \leq |\bar{x}| < x + \Delta x$ における $|\bar{x}|$ の滞在時間 $\tau(x)$ の分布である．ここで， $\Delta x = 0.02$ としており， $\tau(x)$ は $\sum_x \tau(x) = 1$ で規格化している．実線は NLFPE の自己無撞着解 x^* を表しており，破線は NLFPE の転移の臨界点 D_c を表している．(d) 臨界点 D_c の結合強度 ϵ 依存性．各図に共通して，ネットワークのパラメーターは $k_{\min} = 6$ ， $k_{\max} = 87$ ， $\gamma = 2.5$ である．

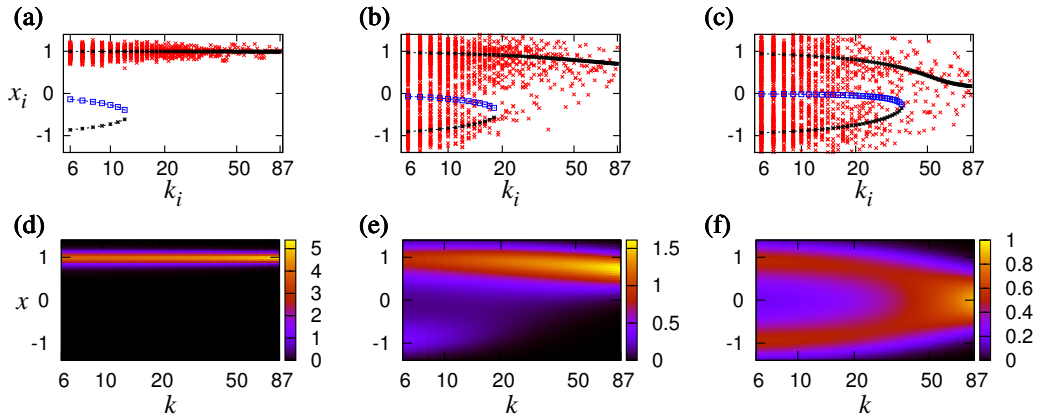


図 3.5 [(a)-(c)] 数値計算によって得られた、十分時間がたったのちの元のネットワーク系の要素 $N = 1800$ の、典型的なスナップショット。ここで、結合強度は、 $\epsilon = 0.02$ ($\epsilon k_{\min} < 1 < \epsilon k_{\max}$ を満たす) である。黒の星印および青の正方形は、平均場 \bar{x} が式 (3.5) によって見積もられたときの、式 (3.6) の安定固定点・不安定固定点を表している。[(d)-(f)] カラーバーの表す色で描いた、 $\epsilon = 0.02$ における非線形 Fokker-Planck 方程式の定常な確率密度関数。ノイズ強度は $D = 0.02$ [(a) と (d)] , $D = 0.14$ [(b) と (e)] , $D = 0.2$ [(c) と (f)] に定めている。ネットワークのパラメーターは $k_{\min} = 6$, $k_{\max} = 87$, $\gamma = 2.5$ である。

3.4.2 秩序 - 無秩序転移

いま、NLFPE における安定・定常な自己無撞着解 x^* と、元の系における初期緩和ののちの平均場 \bar{x} を比較しよう。図 3.4[(a)-(c)] は、これらの絶対値 $|\bar{x}|$ および $|x^*|$ を、 D の関数として表示している (絶対値を考えているのは、系が統計的に $x \leftrightarrow -x$ について対称であるためである)。拡散係数は、図 3.4(a) においては $\epsilon = 0.005$, (b) においては $\epsilon = 0.02$, そして (c) においては $\epsilon = 0.2$ である。それぞれの図における密度表示は終状態における $|\bar{x}|$ の滞在時間の分布を数値計算の結果から出力したものであり、実線は NLFPE の自己無撞着解 x^* である。臨界ノイズ強度は、(a) では $D_c \approx 0.077$, (b) では $D_c \approx 0.184$, (c) では $D_c \approx 0.878$ と見積もられている。ノイズ強度が $D > D_c$ であるとき、NLFPE は無秩序相になり、 $x^* = 0$ となる。ノイズ強度が D_c を下回っていくと、NLFPE は秩序相になり、 $|x^*|$ は大きくなっていく。

数値計算により、この転移が連続であり、転移の指数が古典的 ($|x^*| \sim (D_c - D)^{1/2}$) であることを確認した。元の系の平均場 \bar{x} の分布の位置は、上述の自己無撞着解 x^* とよく一致している。図 3.4(d) は、臨界ノイズ強度 D_c の結合強度 ϵ 依存性を描いている。ここで、 D_c は条件 $dx^{(1)}/dx^{(0)}|_{x^{(0)}=0} = 1$ を満たすように定めている。臨界強度 D_c は常に ϵ に対して増加している。

図 3.5 は、十分時間がたったのちの元のネットワーク系のスナップショット [(a)-(c)] と、平均場 $\langle x \rangle$ が自己無撞着解 x^* を満たすときの NLFPE の定常な確率密度関数 (式 (3.12)) [(d)-(f)] を比較している。ここでは、 $\epsilon k_{\min} < 1 < \epsilon k_{\max}$ が満たされるような、つまり系が時間発展の初期にピッチフォーク状のパターンを示すような ϵ を選んでいる。[(a)-(c)] には、 $\bar{x} = x^*$ が NLFPE (3.11) に代入されたとき

の式 (3.6) の安定固定点も表示している. NLFPE の定常な確率密度関数と元のネットワーク系の要素の分布とが, 良く一致していることが確認できる.

ノイズ強度 D が臨界強度 D_c よりも十分小さいとき, 系は秩序相の「深く」にある [(a),(d)]. 元の系では, $x = 1$ 付近に滞在している要素によって, 平均場が $\bar{x} \approx 1$ になる. 対応して, NLFPE の自己無撞着解も $x^* \approx 1$ になり, 定常な確率密度関数 $P_{st}(x; k)$ は全ての k において $x = 1$ 付近の狭い分布をとる. 式 (3.6) の安定固定点を考えると, 比較的大きい k では上側のグループのみが残り, 対して, 十分に小さい k では下側のグループも残るものと考えられる. しかし, 残っている下側のグループの安定性は極めて小さく, その周りの確率密度関数を図中で見ることができない.

D が D_c に近づくと, 上側のグループの分布は, 特に小さい k において幅広くなる. ネットワーク上の小さい次数の要素は, 高い頻度で上側と下側のグループの間の遷移をする傾向にあり, これに対応して NLFPE の $P_{st}(x; k)$ は, 幅広く, かつ双峰型に近い分布をとる. ここではまだ系が秩序相にあることから, 要素の分布は非対称形をとり, 平均場 \bar{x} は非ゼロの値をとる.

D が D_c を上回ると (図 3.5[(c),(f)]), 系は無秩序相に入る. 要素の分布は $x \leftrightarrow -x$ に対する対称性を取り戻し, NLFPE の $P_{st}(x; k)$ は, 小さい k で双峰型, 大きい k で単峰型をとる, 定常なピッチフォーク状のパターンに収束する. 強いノイズにより, 要素の分布および対応する確率密度関数は秩序相の場合よりも幅広く分布する.

図 3.6 は, $\epsilon k_{\max} < 1$ や $\epsilon k_{\min} > 1$ といった上記とは別の条件下における, 初期緩和から十分時間がたったのちの元のネットワーク系の典型的なスナップショットと NLFPE の定常な確率密度関数を, 比較して表している. $\epsilon k_{\max} < 1$ のとき (図 3.6[(a)-(c)]), 初期の分布はすべての k において双峰型である. 系が緩和すると, 単峰型 ($D \ll D_c$ のとき), 部分的に双峰型 (D が D_c の近傍のとき), すべての k で完全に双峰型 ($D > D_c$ のとき) の分布に変化する. 対して, $\epsilon k_{\min} > 1$ のとき (図 3.6[(d)-(f)]), 初期の分布はすべての k で単峰型になり, パラメーターに応じて, $x = 1$ 付近の狭い単峰型の分布に急速に緩和するか ($D \ll D_c$ の近傍のとき), $0 < x < 1$ の少し幅の広い単峰型の分布に緩和するか (D が D_c のとき), $x = 0$ のまわりの幅の広い単峰型の分布に緩和するか ($D > D_c$ のとき) の, いずれかの挙動を示す. いずれの場合であれ, 元のネットワーク系においても, これを近似する NLFPE においても, $D = D_c$ で対称性が破られる秩序 - 無秩序転移が生じる. これらのふたつの結果はよく一致している.

3.4.3 非線形 Fokker-Planck 方程式に関する H 定理

NLFPE について, 安定定常解への単調な収束を保障する H 定理の成立も示すことができる. つまり, NLFPE の時間発展の間に単調減少し, すべての k の $P(x, t; k)$ が自己無撞着解をとるときに最小値をとる以下の Lyapunov 関数 I を, 各次数 $k = k_{\min}, \dots, k_{\max}$ の確率密度関数 $P(x, t; k)$ を変数として定義できる [18, 49].

$$I = \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \left[\ln P(x, t; \ell) + \frac{V_0(x)}{D} \right] dx + \frac{\epsilon}{2D\langle k \rangle} \sum_{\ell} \ell r(\ell) \sum_m m r(m) \int \int P(x, t; \ell) P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} dx dy \quad (3.14)$$

Lyapunov 関数 I に関する議論は付録 3.8 を参照されたい.

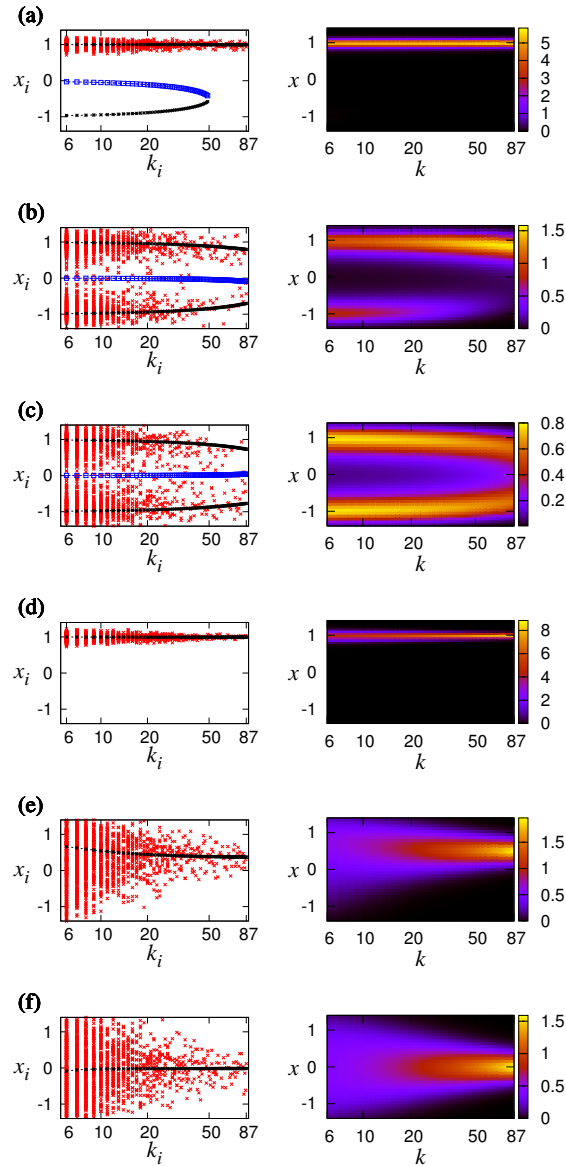


図 3.6 十分時間がたったのちの元のネットワーク系の要素 $N = 1800$ (左列) および、カラーバーの表す色で描いた、非線形 Fokker-Planck 方程式の定常な確率密度関数の、典型的なスナップショット (右列)．左列の黒の星印および青の正方形は、平均場が \bar{x} 式 (3.5) によって見積もられたときの、式 (3.6) の安定固定点・不安定固定点を表している．[(a)-(c)] $\epsilon = 0.005$ ($\epsilon k_{\max} < 1$ を満たす) および (a) $D = 0.01$, (b) $D = 0.07$, (c) $D = 0.1$ ．[(d)-(f)] $\epsilon = 0.2$ ($\epsilon k_{\min} > 1$ を満たす) および (d) $D = 0.02$, (e) $D = 0.7$, (f) $D = 1$ ．ネットワークのパラメーターは $k_{\min} = 6$, $k_{\max} = 87$, $\gamma = 2.5$ である．

3.5 緩和過程

3.5.1 順序だった秩序化

以降、ノイズ強度 D が臨界点 D_c より十分小さいものとし、焦点を秩序化過程にあてる．また、拡散定数 ϵ は、系が初期にピッチフォーク状の分布を示す条件 $\epsilon k_{\min} < 1 < \epsilon k_{\max}$ を満たすものとする．単

峰型の分布をする要素 (比較的次数 k が大きい) および双峰型の分布をする要素 (比較的次数 k が小さい) のうち上側に分かれたものは, 素早く緩和して上側のグループを構成する. 初期に双峰型の分布の下側に分かれた要素は, 次数順に上側のグループへの遅い緩和を示す.

次数順の緩和過程は, 次数 k の要素についての平均場 \bar{x}_k をプロットすることで可視化される. 元のネットワーク系では, \bar{x}_k は以下のように定義される.

$$\bar{x}_k(t) = \frac{1}{N(k)} \sum_{j=1}^N \delta(k_j = k) x_j(t) \quad (3.15)$$

また, 元の系を近似する NLFPE では, この平均場は $P(x, t; k)$ を用いて

$$\langle x \rangle_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t; k) x dx \quad (3.16)$$

と表される.

図 3.7(a) は, いくつかの k についての $\bar{x}_k(t)$ と $\langle x \rangle_k(t)$ の時間発展を表示したものである. また, 図 3.7(c) は, 時間発展における $\bar{x}_k(t)$ と $\langle x \rangle_k(t)$ を k の関数として表示したスナップショットである. $\bar{x}_k(t)$ と $\langle x \rangle_k(t)$ の値は, $\langle x \rangle_k(t)$ の方がわずかに緩和が速い傾向にあるものの, 定量的に一致している. 図 3.7 [(a),(c)] より, 次数の大きい要素の方が緩和が速く, 緩和が次数順に進行していくことが確認できる. 図 3.7[(b),(d)] は時間発展の後半の様子を示している. ここで, 各 $\bar{x}_k(t)$ や $\langle x \rangle_k(t)$ は, $\bar{x}(t) = \langle x \rangle(t)$ が代入された式 (3.7) の $V(x)$ を最小にする $x_g(k)$ に, 次数が大きい要素から順に接近している. ここで, $x_g(k)$ が依然として時間依存性を持つことに注意が必要である. $\bar{x}_k(t)$ や $\langle x \rangle_k(t)$ の値は, その後 $x_g(k)$ が終状態の値 $x_g^*(k)$ に至るまで, $x_g(k)$ の時間変化を追従する. ここで $x_g^*(k)$ は, $\bar{x}(t)$ の最終値 x^* が代入された $V(x)$ を最小にするものである.

3.5.2 遷移率に関する議論

緩和過程におけるダイナミクスの要素の次数への依存性を理解するために, Kramers の遷移率理論を導入する [56–59]. つまり, 緩和初期に二つの安定固定点のまわりに双峰型の分布を形成する, 次数 k の比較的小さい要素の集団に着目する. 各要素は, ポテンシャル障壁のピークを越えて準安定な状態 (準安定な固定点) $x_m(k)$ から安定状態 (より安定な固定点) $x_g(k)$ に緩和するものとする. また, 一度にポテンシャル障壁を越える要素の数は十分少ないものとし, 数値計算から裏付けられるように, 平均場 $\langle x \rangle(t)$ は要素ひとつがポテンシャル障壁を横切る間にほとんど値を変えないものとする.

白色 Gauss ノイズによって駆動される粒子が, 高さ V_u のポテンシャル障壁を越える状況を考えよう. Kramers の理論は, このときの遷移時間 T が $T \propto \exp(V_u/D)$ でスケーリングできることを主張する. 本研究の場合, ポテンシャル関数 $V(x)$ は Eq. (3.7) で与えられる. また, ポテンシャル障壁は, 不安定固定点 $x_u(k)$ と準安定な固定点 $x_m(k)$ のポテンシャルの値 $V(x)$ の差 V_u で与えられ, 下式のように表される.

$$\begin{aligned} V_u(\langle x \rangle; k) &= V(x_u(k)) - V(x_m(k)) \\ &= \left\{ V_0(x_u(k)) + \epsilon k \frac{[x_u(k) - \langle x \rangle]^2}{2} \right\} - \left\{ V_0(x_m(k)) + \epsilon k \frac{[x_m(k) - \langle x \rangle]^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

この値は, 要素の次数 k と平均場 $\langle x \rangle$ に依存する. 図 3.8 は $V_u(\langle x \rangle; k)$ の典型的な次数 k 依存性を表している ($\langle x \rangle = 0$ (a), $\langle x \rangle = 0.3$ (b), $\langle x \rangle = 0.6$ (c), $\langle x \rangle = 0.9$ (d)). なお, 結合強度の値はそれぞれ様々

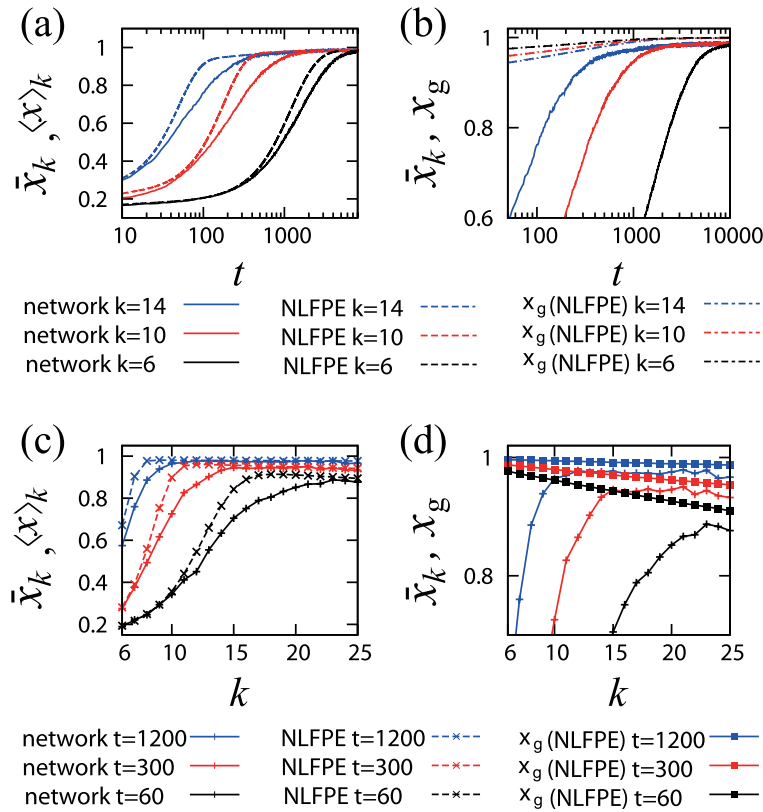


図 3.7 (a) 元のネットワーク系 ($N = 1800$) における次数 k の要素の \bar{x}_k および、これを近似する NLFPE における各 k の $\langle x \rangle_k$ の時間発展. (b) k ごとの、 \bar{x}_k および、式 (3.7) を最小にする安定固定点 $x_g(k)$ の時間発展. ここで、 $x_g(k)$ は NLFPE から得られる $\bar{x} = \langle x \rangle$ を用いて計算している. (c) 幾つかの時刻 t における \bar{x}_k と $\langle x \rangle_k$ を k の関数としてプロットしたもの. (d) 幾つかの時刻 t における \bar{x}_k と $x_g(k)$ を k の関数としてプロットしたもの. 系のパラメーターは $N = 1800$, $k_{\min} = 6$, $k_{\max} = 87$, $\gamma = 2.5$, $D = 0.02$, $\epsilon = 0.02$ である. 元の系の平均場は、50 回の実現値についての平均値である.

に変えている. $V_u(\langle x \rangle; k)$ が k に対しほぼ線形に減少する様子が見られ、これより、遷移時間が k の増加に対し指数関数的に減少することが確認できる. このような k に対する $V_u(\langle x \rangle; k)$ の線形の依存性は、 $-1 < \langle x \rangle < 1$ の範囲で普遍的に観測される. また、ポテンシャル障壁の最大値 $V_u(\langle x \rangle; k_{\min})$ は、平均場近似の絶対値 $|\langle x \rangle|$ の増加とともに減少する傾向にある. このことから、系の秩序化が進み $|\langle x \rangle|$ が増加するとき、準安定状態からの遷移が加速することが理解できる.

以上のように、遷移率に関する議論によって、緩和時間の大きな次数依存性、さらには次数順に緩和が進行する現象が、定量的に理解できる.

3.5.3 系全体の緩和時間

図 3.9 は、様々な結合強度 ϵ における元の系および NLFPE の系全体の平均場 $\bar{x}(t)$, $\langle x \rangle(t)$ の、時間発展を表している. 図 3.9(a) を見ると、 ϵ が大きい場合に緩和が極めて速いことが確認できる. これは、 ϵ が大きい場合にポテンシャル障壁 $V_u(\langle x \rangle; k)$ が小さくなるためである. 図 3.9(b) は、系全体の緩和時間を元のネットワーク系と NLFPE のそれぞれについて ϵ ごとに表しており、比較のための Kramers の理論によって得た結果も表示している. 遷移率の議論より、最小次数 $k = k_{\min}$ の要素の緩和が律速段

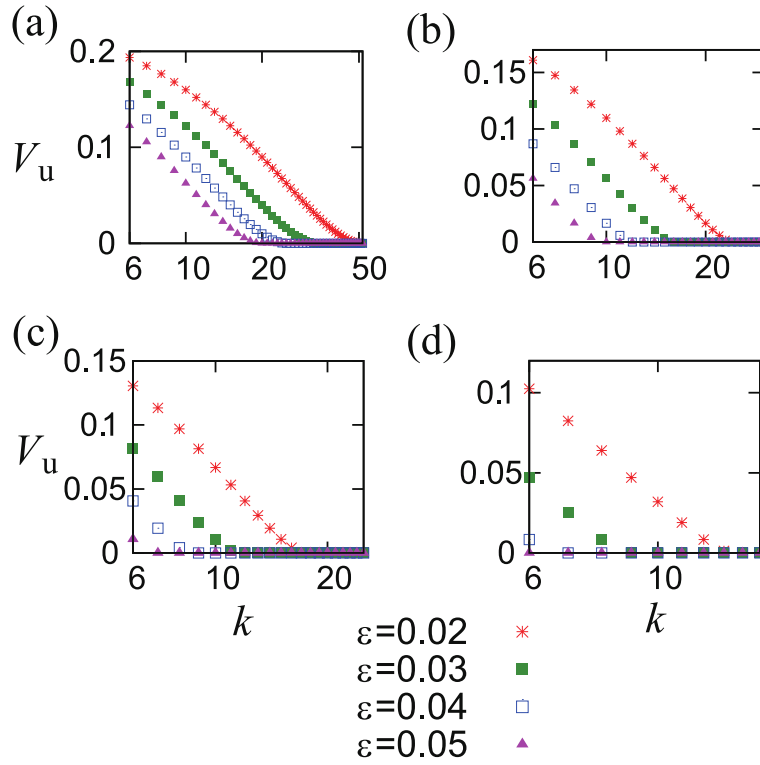


図 3.8 ポテンシャル障壁 V_u の次数 k 依存性 ((a) $\langle x \rangle = 0$, (b) $\langle x \rangle = 0.3$, (c) $\langle x \rangle = 0.6$, (d) $\langle x \rangle = 0.9$).

階になることや、この段階が全体の緩和時間において支配的であることが期待される。いま、最小次数 k_{\min} 以外の要素がすべて緩和し、 $x = x^* \approx 1$ 付近に形成される上側のグループに属している状況を考えよう。この状況における平均場は近似的に以下のように表される。

$$\bar{x} \simeq \sum_{k=k_{\min}+1}^{k_{\max}} \frac{N(k)}{N} \frac{k}{\langle k \rangle} x^* \approx 0.8841 \quad (3.18)$$

ただし、 $\gamma = 2.5$, $k_{\max} = 87$ とした。最小次数 $k = k_{\min}$ の要素に関する Kramers の遷移時間 $T = C \exp[-V_u(\bar{x}; k_{\min})/D]$ は、図 3.9(b) の破線によって示している。ここで、係数 C は最小二乗法によって決定している。もとのネットワーク系および NLFPE 全体の緩和時間は、次数最小 k_{\min} の要素による最長の遷移時間 T とよく一致している。この結果は、遷移率について言及する理論によって、系の緩和ダイナミクスが定量的に説明できることを示唆している。

3.6 結論および議論

この論文では、スケールフリーネットワーク上で拡散的に結合されたノイズを受けた結合双安定系が示す秩序化過程について報告した。大域結合系と同様の秩序 - 無秩序転移がネットワーク上の系でも生じることを示し、また、次数に特徴的な挙動が生じることも明らかにした。ネットワークについての平均場近似を用いることで、緩和の後期においてネットワーク上のパターンが、次数に依存する強度で平均場との相互作用を感受する、個々の要素の局所的なダイナミクスの安定固定点に一致することを示した。さらに、NLFPE によって元のネットワーク系を近似し、自己無撞着性を解析することで、元のネットワーク系で秩序 - 無秩序転移が生じることや、ノイズ強度が分岐パラメーターの役割を持つことを示唆した。

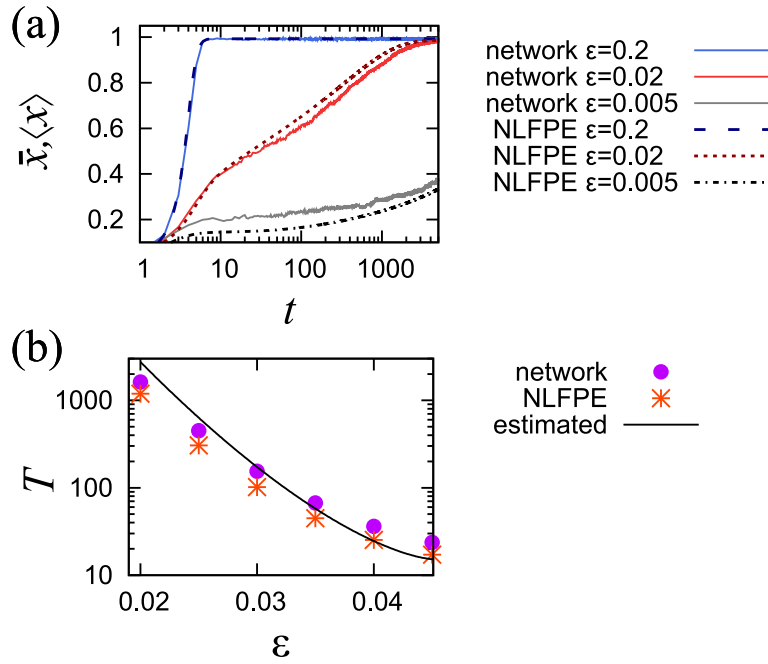


図 3.9 (a) 幾つかの ϵ における、元のネットワーク系 ($N = 1800$) の緩和過程における平均場 $\bar{x}(t)$ (50 回の実現値の平均) および、元の系を近似する NLFPE の平均場 $\langle x \rangle(t)$ の時間発展. (b) ϵ の関数として表示している、元のネットワーク系 ($N = 1800$) の平均場 (50 回の実現値の平均) および NLFPE の平均場 $\langle x \rangle(t)$ の緩和時間 T . ここで、緩和時間 T は、 $\bar{x}(t)$ や $\langle x \rangle(t)$ が $0.95 \times x^*$ を上回るまでの総時間で与えている. 破線は平均場 \bar{x} を式 (3.18) で与えた場合の Kramers の遷移率 $T = C \exp[-V_u(\bar{x}; k_{\min})/D]$ である. ここで、係数 C は最小二乗法で定めている. ネットワークのパラメーターは $k_{\min} = 6$, $k_{\max} = 87$, $\gamma = 2.5$ であり、ノイズ強度は $D = 0.02$ に固定している.

さらに、定常状態に向かう系の緩和において、次数順の緩和が生じることを見だし、このような次数依存性の理由を、Kramers の遷移率の理論に基づいて定量的に説明した.

この研究は、特定の実世界の現象を考察するものではないが、双安定性がしばしば社会の合意形成を扱うモデルで見られることを述べておきたい. 例えば、コミュニティ内の意見形成を表すモデルのひとつとして知られており、実際の選挙におけるスケーリング則を再現する Sznajd モデル [61, 62] は特定の条件下において単一の双安定系のように振る舞う [63]. 従って、このようなコミュニティをネットワーク構造で結合するとき (2 つのコミュニティが結合されている場合については文献 [51] を見よ), 本研究において我々が解析したネットワーク上の結合双安定系と似た挙動を再現することが期待される.

ネットワーク上のダイナミクスの強い次数依存性は、本研究のものに限らず、様々なスケールフリーネットワーク上のモデルで共通して見られる. 本研究の焦点は、実世界の特定の系ではなくあくまでスケールフリーネットワーク上の一般的なダイナミクス特性に当てているが、本研究の理論的な発見には、実世界の現象の解析に寄与する可能性が潜在しているものと期待される.

3.7 付録 A：自己無撞着解の存在

ここでは、大域結合系に対して用いられている Shiino [18] の議論を拡張することにより、以下の2つの式を証明する。

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial x^{(0)}} \Big|_{x^{(0)}=0} < 1 \quad \text{when } D \rightarrow \infty \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial x^{(0)}} \Big|_{x^{(0)}=0} > 1 \quad \text{when } D \rightarrow +0 \quad (3.20)$$

ここで、 $x^{(0)}$ と $x^{(1)}$ はそれぞれ仮定した平均場と再計算される平均場を表す。式 (3.12) に $\langle x \rangle = x^{(0)}$ を代入して得られる、 $\int P_{\text{st}}(x; k) dx = 1$ で規格化された分布 $P_{\text{st}}(x; k)$ は、以下のように明示的に表される。

$$\begin{aligned} P_{\text{st}}(x; k) &= \frac{1}{z_P(k)} \exp \left[-\frac{V_0(x)}{D} - \epsilon k \frac{(x - x^{(0)})^2}{2D} \right] \\ z_P(k) &= \int \exp \left[-\frac{V_0(x)}{D} - \epsilon k \frac{(x - x^{(0)})^2}{2D} \right] dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで、 $z_P(k)$ は規格化定数の逆数である。式 (3.13) で定義された、再計算された平均場 $x^{(1)}$ は、以下のように表される。

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \sum_k \frac{k}{\langle k \rangle} r(k) x_k^{(1)} \\ x_k^{(1)} &= \langle x \rangle_k = \int x P_{\text{st}}(x; k) dx \end{aligned} \quad (3.22)$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle_k$ は $P_{\text{st}}(x; k)$ で重み付けした期待値を表す。まず、以下の関係を示そう。

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial x^{(0)}} \Big|_{x^{(0)}=0} = \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{k}{\langle k \rangle} r(k) \frac{\epsilon k}{D} \langle x^2 \rangle_k \Big|_{x^{(0)}=0} \quad (3.23)$$

ここで、 $\langle x^2 \rangle_k = \int x^2 P_{\text{st}}(x; k) dx$ とした。 $x^{(1)}$ の定義を $x^{(0)}$ で微分すると、以下の式が得られる。

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial x^{(0)}} = \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{k}{\langle k \rangle} r(k) \frac{\partial x_k^{(1)}}{\partial x^{(0)}} \quad (3.24)$$

ここで、右辺の微分は以下のように表される。

$$\frac{\partial x_k^{(1)}}{\partial x^{(0)}} = \frac{1}{z_P(k)^2} \int \left\{ z_P(k) \frac{\partial}{\partial x^{(0)}} - \left(\frac{\partial z_P(k)}{\partial x^{(0)}} \right) \right\} x \exp \left[-\frac{V_0(x)}{D} - \epsilon k \frac{(x - x^{(0)})^2}{2D} \right] dx \quad (3.25)$$

また、 $z_P(k)$ の微分は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_P(k)}{\partial x^{(0)}} &= \frac{\epsilon k}{D} \int (x - x^{(0)}) \exp \left[-\frac{V_0(x)}{D} - \epsilon k \frac{(x - x^{(0)})^2}{2D} \right] dx \frac{\epsilon k}{D} z_P(k) \int (x - x^{(0)}) P_{\text{st}}(x; k) dx \\ &= \frac{\epsilon k}{D} z_P(k) (x_k^{(1)} - x^{(0)}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

これより、以下の結果を得ることができる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_k^{(1)}}{\partial x^{(0)}} &= \frac{\epsilon k}{D} \frac{1}{z_P(k)} \int (x^2 - x x_k^{(1)}) \exp \left[-\frac{V_0(x)}{D} - \epsilon k \frac{(x - x^{(0)})^2}{2D} \right] dx \\
&= \frac{\epsilon k}{D} \int (x^2 - x x_k^{(1)}) P_{\text{st}}(x; k) dx \\
&= \frac{\epsilon k}{D} \left\{ \langle x^2 \rangle_k - (x_k^{(1)})^2 \right\} \\
&= \frac{\epsilon k}{D} (\langle x^2 \rangle_k - \langle x \rangle_k^2)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

この結果と、 $x^{(0)} = 0$ のとき $\langle x \rangle_k^2 = 0$ が満たされることから、式 (3.23) が示される。

いま、本文で用いられている、以下の 2 つの関係を示す。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^{(1)}}{\partial x^{(0)}} \Big|_{x^{(0)}=0} &= \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{k}{\langle k \rangle} r(k) \frac{\epsilon k}{D} \langle x^2 \rangle_k \Big|_{x^{(0)}=0} < 1 \\
&\text{when } D \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^{(1)}}{\partial x^{(0)}} \Big|_{x^{(0)}=0} &= \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{k}{\langle k \rangle} r(k) \frac{\epsilon k}{D} \langle x^2 \rangle_k \Big|_{x^{(0)}=0} > 1 \\
&\text{when } D \rightarrow +0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

まず、式 (3.28) について考える。この不等式を示すため、 k が有限のときの $D \rightarrow \infty$ において、 $(\epsilon k/D) \langle x^2 \rangle_k \Big|_{x^{(0)}=0} \rightarrow 0$ が成り立つことを示す。定義より、 $(1/D) \langle x^2 \rangle_k \Big|_{x^{(0)}=0}$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D} \langle x^2 \rangle_k \Big|_{x^{(0)}=0} &= \frac{1}{D} \frac{\int x^2 \exp \left[-\frac{V_0(x)}{D} - \epsilon k \frac{x^2}{2D} \right] dx}{\int \exp \left[-\frac{V_0(x)}{D} - \epsilon k \frac{x^2}{2D} \right] dx} \\
&= \frac{1}{D} \frac{\int x^2 \exp(\Phi/D) dx}{\int \exp(\Phi/D) dx}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

ここで、 $\Phi(x)$ を以下のように定義した。

$$\Phi(x) \equiv -V_0(x) - \epsilon k \frac{x^2}{2} \tag{3.31}$$

$V_0(x)$ が x の 4 次の関数であることから、以下の関係式を満たすように 3 つの定数 M, K_1, K_2 を導入できる。

$$-K_2 x^4 - M \leq \Phi(x) \leq -K_1 x^4 + M \tag{3.32}$$

式 (3.32) を用いると、以下を示すことができる。

$$\begin{aligned}
\frac{\int x^2 \exp(\Phi/D) dx}{\int \exp(\Phi/D) dx} &\leq \frac{\int x^2 \exp \left[\frac{-K_1 x^4 + M}{D} \right] dx}{\int \exp \left[\frac{-K_2 x^4 - M}{D} \right] dx} \\
&= \frac{\exp(2M/D) D^{1/2} \int X^2 \exp(-K_1 X^4) dX}{\int \exp(-K_2 X^4) dX}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

ここで, $X = D^{-1/4}x$ を定義した. これより, 以下の成立が確かめられる.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D} \langle x^2 \rangle_k |_{x(0)=0} \\ &\leq \lim_{D \rightarrow \infty} \exp(2M/D) D^{-1/2} \frac{\int X^2 \exp(-K_1 X^4) dX}{\int \exp(-K_2 X^4) dX} = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

すなわち, 有限の k において以下が成立する.

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{\epsilon k}{D} \langle x^2 \rangle_k |_{x(0)=0} = 0 \quad (3.35)$$

したがって, 有限の k_{\max} において, 以下の成立が示される.

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{k}{\langle k \rangle} r(k) \frac{\epsilon k}{D} \langle x^2 \rangle_k |_{x(0)=0} = 0 \quad (3.36)$$

これより, 式 (3.28) が満たされることが確認できる.

次に, 式 (3.29) が有限の k のときに $D \rightarrow +0$ において漸近的に成り立つことを示す.

まず初めに, $\Phi(x)$ が $x \neq 0$ ($\epsilon k < 1$) に 2 つの極値を持つ場合について考える. ここで, 2 つの極値は記号 $x = (x_S)_i$ ($i = 1, 2$) で表すものとする. $\Phi(x)$ は, $(x_S)_i$ の周りでテイラー展開すると, 以下の式で表される.

$$\Phi(x) = A - a_i [x - (x_S)_i]^2 + \dots \quad (3.37)$$

ここで, a_i および A は以下のように定める.

$$a_i > 0, \quad A = \max_x \Phi(x) \quad (3.38)$$

いま, 以下の関係を与える鞍点法を導入する.

$$\begin{aligned} \int f(x) e^{K\Phi(x)} dx &= \sum_i e^{K\Phi[(x_S)_i]} \sqrt{\frac{2\pi}{K|\Phi''[(x_S)_i]|}} \{f[(x_S)_i] + O(K^{-1})\} \\ &\text{when } K \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.39)$$

これに対して, $f(x) = x^2$ または $f(x) = 1$ および, $K = 1/D$, $|\Phi''[(x_S)_i]| = 2a_i$, $\Phi[(x_S)_i] = A$ を代入すると, 以下の関係が $D \rightarrow +0$ の極限において漸近的に成立することが示される.

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_k |_{x(0)=0} &\rightarrow \frac{e^{A/D} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{D\pi}{a_i}\right)^{1/2} \{(x_S)_i^2 + O(D)\}}{e^{A/D} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{D\pi}{a_i}\right)^{1/2} \{1 + O(D)\}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{a_i}\right)^{1/2} \{(x_S)_i^2 + O(D)\}}{\sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{a_i}\right)^{1/2} \{1 + O(D)\}} \\ &> 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

したがって, 有限の k において以下が成立する.

$$\lim_{D \rightarrow +0} \frac{\epsilon k}{D} \langle x^2 \rangle_k |_{x(0)=0} = \infty \quad (3.41)$$

次に、 $\Phi(x)$ が $x=0$ において単一の最大値をとるとき、すなわち $\epsilon k > 1$ のときについて考える。ここで、 k は有限であるものとする。この場合、次のように定義する $X = (\epsilon k/D)^{1/2}x$ 、 $(\epsilon k/D)\langle x^2 \rangle_k|_{x(0)=0}$ を用いて、上式の左辺を以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \lim_{D \rightarrow +0} \frac{\epsilon k}{D} \langle x^2 \rangle_k|_{x(0)=0} &= \lim_{D \rightarrow +0} \frac{\epsilon k}{D} \frac{\int x^2 \exp \left[\left(\frac{1}{2D} - \frac{\epsilon k}{2D} \right) x^2 - \frac{1}{4D} x^4 \right] dx}{\int \exp \left[\left(\frac{1}{2D} - \frac{\epsilon k}{2D} \right) x^2 - \frac{1}{4D} x^4 \right] dx} \\ &= \lim_{D \rightarrow +0} \frac{\int X^2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon k} \right) X^2 - \frac{DX^4}{4\epsilon^2 k^2} \right] dX}{\int \exp \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon k} \right) X^2 - \frac{DX^4}{4\epsilon^2 k^2} \right] dX} \\ &= \frac{\int X^2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon k} \right) X^2 \right] dX}{\int \exp \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon k} \right) X^2 \right] dX} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Gauss 積分の性質より、以下の関係が得られる。

$$\lim_{D \rightarrow +0} \frac{\epsilon k}{D} \langle x^2 \rangle_k|_{x(0)=0} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{\epsilon k}}} = \sqrt{\frac{\epsilon k}{\epsilon k - 1}} > 1 \quad (3.43)$$

この結果および式 (3.41) より、任意の k における $(\epsilon k/D)\langle x^2 \rangle_k|_{x(0)=0} > 1$ の成立、すなわち式 (3.29) の成立が示される。

3.8 付録 B : Lyapunov 関数

Shiino や Frank らに倣い [18, 49]、Lyapunov 関数 I を以下のように定義する。

$$I = \frac{H}{D} - S \quad (3.44)$$

ここで、 S および H はそれぞれ情報エントロピーとエネルギーの期待値であり、 D はノイズ強度である。ここで $F = DI = H - DS$ と F を定義すれば、これは一般化された自由エネルギーに相当する。元のネットワーク系を近似する NLFPE では、 S および H は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} S &= - \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \ln P(x, t; \ell) dx \\ H &= \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \left\{ V_0(x) + \frac{\epsilon \ell}{2\langle k \rangle} \sum_m m r(m) \int P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} dy \right\} dx \end{aligned} \quad (3.45)$$

ここで、 $V_0(x)$ は式 (3.12) で定義されるポテンシャル関数である。これより、以下が得られる。

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \left[\ln P(x, t; \ell) + \frac{V_0(x)}{D} \right] dx \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2D\langle k \rangle} \sum_{\ell} \ell r(\ell) \sum_m m r(m) \int \int P(x, t; \ell) P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} dx dy \end{aligned} \quad (3.46)$$

この表式は本文中の式 (3.14) である。以下では、 I が系の Lyapunov 関数であることを示す。すなわち、 I が、Frank らの研究で述べられているような [49]、系の時間発展において単調減少し、かつ定常状態において最小値をとる関数であることを示す。

I の微分を計算するために、以下の二つの関数を定義する．第一に導入する $Q(x; k)$ は、式 (3.12) に自己無撞着な平均場 x^* を代入したときの NLFPE の確率密度関数である．第二に導入する関数は、 $Q(x; k)$ の規格化定数の逆数であり、以下のように表される．

$$\tilde{z}_Q(k) = \frac{\tilde{Q}(x; k)}{Q(x; k)} \quad (3.47)$$

つまり、 $Q(x; k) = \tilde{Q}(x; k) / \tilde{z}_Q(k)$ である．ここで、規格化されていない確率密度関数である $\tilde{Q}(x; k)$ は、以下のように表される．

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(x; k) &= \exp \left[-\frac{V_0(x)}{D} - \frac{\epsilon k}{D\langle k \rangle} \sum_m mr(m) \int Q(y; m) \frac{(x-y)^2}{2} dy \right] \\ &= \exp \left[-\frac{V_0(x)}{D} - \epsilon k \frac{(x-x^*)^2}{2D} - \frac{\epsilon k}{D\langle k \rangle} \sum_m mr(m) \int Q(y; m) \frac{(x^*-y)^2}{2} dy \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

上式の 2 行目の最終項が定数であることから、 $\langle x \rangle = x^*$ が代入された式 (3.12) の分布に $\tilde{Q}(x; k)$ が比例することが確かめられる．これより、規格化定数の逆数は以下のように表される．

$$\tilde{z}_Q(k) = \frac{\exp[-V_0(x)/D]}{f[Q(x; k); k]} \quad (3.49)$$

ここで、 $f[Q(x; k); k]$ は以下のように定義した．

$$f[Q(x; k); k] = Q(x; k) \exp \left[\frac{\epsilon k}{D\langle k \rangle} \sum_m mr(m) \int Q(y; m) \frac{(x-y)^2}{2} dy \right] \quad (3.50)$$

この関数は、 $Q(x; k)$ を結合のない Fokker-Planck 方程式 (式 (3.11) に対して $\epsilon = 0$ を代入したもの) の定常な確率密度関数に写像する．以上より、ポテンシャル関数 $V_0(x)$ は以下のように表される．

$$V_0(x) = -D \ln \{ \tilde{z}_Q(k) f[Q(x; k); k] \} \quad (3.51)$$

上で定義した関数 $\tilde{z}_Q(k)$ および $f[Q(x; k); k]$ を用いることで、 H を以下のように書くことができる．

$$\begin{aligned} H &= -D \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \ln \{ \tilde{z}_Q(\ell) f[Q(x; \ell); \ell] \} dx \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2\langle k \rangle} \sum_{\ell} \ell r(\ell) \sum_m mr(m) \int \int P(x, t; \ell) P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} dx dy \\ &= -D \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \ln f[Q(x; \ell); \ell] dx - D \sum_{\ell} r(\ell) \ln \tilde{z}_Q(\ell) \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2\langle k \rangle} \sum_{\ell} \ell r(\ell) \sum_m mr(m) \int \int P(x, t; \ell) P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} dx dy \end{aligned} \quad (3.52)$$

ここで、 $\int P(x, t; \ell) dx = 1$ を用いた．これより、関数 I は以下のように書かれる．

$$\begin{aligned} I[P(x, t; k), Q(x; k)] &= \frac{\epsilon}{2D\langle k \rangle} \sum_{\ell} \ell r(\ell) \sum_m mr(m) \int \int P(x, t; \ell) P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} dx dy \\ &\quad + \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \ln P(x, t; \ell) dx - \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \ln f[Q(x; \ell); \ell] dx \\ &\quad - \sum_{\ell} r(\ell) \ln \tilde{z}_Q(\ell) \end{aligned} \quad (3.53)$$

ここで, x に対して独立な定数である最終項は, Lyapunov 関数の性質を失うことなく取り除くことができる.

いま, $I[P(x, t; k), Q(x; k)]$ が Lyapunov 関数であること, すなわち I が以下を満たすことを証明しよう.

$$\frac{d}{dt}I \leq 0, \quad \frac{d}{dt}I = 0 \Leftrightarrow P(x, t; k) = P_{\text{st}}(x; k), \quad I > -\infty \quad (3.54)$$

まず, I が単調減少関数であることを確認しよう. I を時間で微分すると, 以下が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(t) &= \frac{\epsilon}{D\langle k \rangle} \sum_{\ell} \ell r(\ell) \sum_m m r(m) \int \int \frac{\partial P(x, t; \ell)}{\partial t} P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} dx dy \\ &\quad + \sum_{\ell} r(\ell) \int \frac{\partial P(x, t; \ell)}{\partial t} \ln P(x, t; \ell) dx - \sum_{\ell} r(\ell) \int \frac{\partial P(x, t; \ell)}{\partial t} \ln f[Q(x; \ell); \ell] dx \\ &= \sum_{\ell} r(\ell) \int \frac{\partial P(x, t; \ell)}{\partial t} \left\{ \frac{\epsilon \ell}{D\langle k \rangle} \sum_m m r(m) \int P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} dy + \ln P(x, t; \ell) - \ln f[Q(x; \ell); \ell] \right\} dx \end{aligned} \quad (3.55)$$

ここで, $\int \{\partial P(x, t; k)/\partial t\} dx = (d/dt) \int P(x, t; k) dx = 0$ を用いた. 式 (3.50) の $Q(x; k)$ を $P(x, t; k)$ に置き換えると, 以下が得られる.

$$\ln P(x, t; k) + \frac{\epsilon k}{D\langle k \rangle} \sum_m m r(m) \int P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} dy = \ln f[P(x, t; k); k] \quad (3.56)$$

ここで, 式 (3.55) は以下のように簡単化できる.

$$\frac{d}{dt}I(t) = \sum_{\ell} r(\ell) \int \frac{\partial P(x, t; \ell)}{\partial t} \ln \left\{ \frac{f[P(x, t; \ell); \ell]}{f[Q(x; \ell); \ell]} \right\} dx \quad (3.57)$$

この式における $\partial P/\partial t$ は, 式 (3.11) を用いて以下のように表される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t; k)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} P(x, t; k) \left\{ h(x) + \epsilon k \left[\sum_m \frac{m}{\langle k \rangle} r(m) \int y P(y, t; m) dy \right] - x \right\} + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t; k) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} P(x, t; k) \left\{ h(x) - \frac{\epsilon k}{\langle k \rangle} \sum_m m r(m) \int (x-y) P(y, t; m) dy - D \frac{\partial}{\partial x} \ln P(x, t; k) \right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} P(x, t; k) \left\{ h(x) - D \frac{\partial}{\partial x} \ln f[P(x, t; k); k] \right\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

ここで, $h(x) = x - x^3$ は以下のように表される.

$$h(x) = -\frac{\partial V_0(x)}{\partial x} = D \frac{\partial}{\partial x} \{\ln \tilde{z}_Q(k) + \ln f[Q(x; k); k]\} = D \frac{\partial}{\partial x} \ln f[Q(x; k); k] \quad (3.59)$$

式 (3.59) を用いると, 式 (3.58) は以下のように表される.

$$\frac{\partial P(x, t; k)}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} P(x, t; k) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left\{ \frac{f[P(x, t; k); k]}{f[Q(x; k); k]} \right\} \quad (3.60)$$

従って、以下のように、Lyapunov 関数 I が時間に対して単調減少であることが確かめられる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(t) &= D \sum_{\ell} r(\ell) \int \left[\frac{\partial}{\partial x} P(x, t; \ell) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left\{ \frac{f[P(x, t; \ell); \ell]}{f[Q(x; \ell); \ell]} \right\} \right] \ln \left\{ \frac{f[P(x, t; \ell); \ell]}{f[Q(x; \ell); \ell]} \right\} dx \\
&= D \sum_{\ell} r(\ell) \left[P(x, t; \ell) \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \left\{ \frac{f[P(x, t; \ell); \ell]}{f[Q(x; \ell); \ell]} \right\} \right) \ln \left\{ \frac{f[P(x, t; \ell); \ell]}{f[Q(x; \ell); \ell]} \right\} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&\quad - D \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \left\{ \frac{f[P(x, t; \ell); \ell]}{f[Q(x; \ell); \ell]} \right\} \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left\{ \frac{f[P(x, t; \ell); \ell]}{f[Q(x; \ell); \ell]} \right\} dx \\
&= -D \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln \left\{ \frac{f[P(x, t; \ell); \ell]}{f[Q(x; \ell); \ell]} \right\} \right]^2 dx \leq 0
\end{aligned} \tag{3.61}$$

次に、 $\frac{dI}{dt} = 0 \Leftrightarrow P(x, t; k) = P_{\text{st}}(x; k)$ が成り立つことを示そう。 $P(x, t; k) = P_{\text{st}}(x; k) \Rightarrow \frac{dI}{dt} = 0$ の成立は明らかなので、この逆を示せば十分である。式 (3.61) より、 $\frac{dI}{dt} = 0$ であるために、任意の k と x において以下が満たされなければならない。

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \left\{ \frac{f[P(x, t; k); k]}{f[Q(x; k); k]} \right\} = 0 \tag{3.62}$$

言い換えると、下式のように書き換えられる $f[P(x, t; k); k]/f[Q(x; k); k]$ が、定数でなければならない。

$$\frac{f[P(x, t; k); k]}{f[Q(x; k); k]} = \tilde{z}_Q(k) P(x, t; k) \exp \left[\frac{V_0(x)}{D} + \frac{\epsilon k}{D \langle k \rangle} \sum_m m r(m) \int P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} dy \right] \tag{3.63}$$

これより、 $P(x, t; k)$ は以下を満たさなければならない。

$$\begin{aligned}
P(x, t; k) &\propto \exp \left[-\frac{V_0(x)}{D} - \frac{\epsilon k}{D \langle k \rangle} \sum_m m r(m) \int P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} dy \right] \\
&\propto \exp \left[-\frac{V_0(x)}{D} - \epsilon k \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2D} \right]
\end{aligned} \tag{3.64}$$

これは、式 (3.12) の定常な確率密度関数 $P_{\text{st}}(x; k)$ を与える。3.4.1 章で議論したように、 $P_{\text{st}}(x; k)$ は $\langle x \rangle = x^*$ を満たさなければならない。系が秩序相にあるとき、 x^* は 2 つの値をとることができ、NLFPE は 2 つの異なる定常な確率分布 $P_{\text{st}}^{(1)}(x; k) = Q(x; k)$ 、 $P_{\text{st}}^{(2)}(x; k)$ をとることができる。定常な確率密度関数 $P_{\text{st}}(x; k)$ は、これらのどちらであってもよく、必ずしも $Q(x; k)$ と一致している必要はない。詳細は Frank らの文献 [49] で議論されている。

最後に、 $I > -\infty$ を示そう。関係 $\langle x \rangle = (1/\langle k \rangle) \sum_m m r(m) \int y P(y, t; m) dy$ および $(x-y)^2 = (x - \langle x \rangle)^2 + 2(x - \langle x \rangle)(\langle x \rangle - y) + (\langle x \rangle - y)^2$ を用いることで、以下を示すことができる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\langle k \rangle} \sum_m m r(m) \int dy P(y, t; m) \frac{(x-y)^2}{2} &= \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2} + (x - \langle x \rangle) \left(\langle x \rangle - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_m m r(m) \int y P(y, t; m) dy \right) \\
&\quad + \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_m m r(m) \int P(y, t; m) \frac{(\langle x \rangle - y)^2}{2} dy \\
&= \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2} + \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_m m r(m) \int \frac{(\langle x \rangle - y)^2}{2} P(y, t; m) dy
\end{aligned} \tag{3.65}$$

これより、式 (3.14) の Lyapunov 関数は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
I[P(x, t; k), Q(x; k)] &= \sum_{\ell} \ell r(\ell) \int P(x, t; \ell) \left\{ \epsilon \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4D} + \frac{\epsilon}{2D \langle k \rangle} \sum_m m r(m) \int P(y, t; m) \frac{(\langle x \rangle - y)^2}{2} dy \right\} dx \\
&\quad + \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \ln P(x, t; \ell) dx + \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \frac{V_0(x)}{D} dx \\
&= \sum_{\ell} \ell r(\ell) \int P(x, t; \ell) \epsilon \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4D} dx + \sum_m m r(m) \int P(y, t; m) \epsilon \frac{(\langle x \rangle - y)^2}{4D} dy \\
&\quad + \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \ln P(x, t; \ell) dx + \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \frac{V_0(x)}{D} dx \\
&= \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \left\{ \frac{V_0(x)}{D} + \epsilon \ell \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2D} \right\} dx + \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \ln P(x, t; \ell) dx
\end{aligned} \tag{3.66}$$

いま、規格化定数 $z_{P'}(\ell)^{-1}$ を伴う以下の分布を導入しよう。

$$P'(x; \ell) = \frac{1}{z_{P'}(\ell)} \exp \left[-\frac{V_0(x)}{D} - \epsilon \ell \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2D} \right] \tag{3.67}$$

この分布は必ずしも自己無撞着性を満たしてはいない。これにより、 I はさらに以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
I[P(x, t; k), Q(x; k)] &= - \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \{ \ln P'(x; \ell) + \ln z_P(\ell) \} dx + \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \ln P(x, t; \ell) dx \\
&= \sum_{\ell} r(\ell) \int P(x, t; \ell) \ln \frac{P(x, t; \ell)}{P'(x; \ell)} dx - \sum_{\ell} r(\ell) \ln z_{P'}(\ell)
\end{aligned} \tag{3.68}$$

ここで、初項は $P(x, t; \ell)$ に対する $P'(x; \ell)$ の Kullback-Leibler 情報量 [18, 49, 58, 60] であり、非負である。以上より、 $I[P(x, t; k), Q(x; k)] \geq - \sum_{\ell} r(\ell) \ln z_P(\ell) > -\infty$ が示された。

第 4 章

補遺：秩序 - 無秩序転移点近傍でのスケーリング則

前章では、公表論文 [1] の内容に沿って、スケールフリーネットワーク上のノイズを受けた結合双安定系が、ノイズ強度 D をパラメーターとした秩序 - 無秩序転移や、次数の不均一性を反映した緩和過程を示すことを説明した。系を近似する非線形 Fokker-Planck 方程式 (NLFPE) を導入および解析することにより、マクロな量のひとつである平均場によって転移が特徴付けられることを示した。また、NLFPE において、秩序相における転移点付近の平均場の増加が古典的なスケーリング則 $\sim (D_c - D)^{1/2}$ に従うことを確認した。しかし、公表論文においては、元のネットワーク系の平均場のスケーリング側に関する定量的な議論を行わなかった。また、転移点近傍の平均場の挙動を描いた図 3.4 において、比較的小さい種類の N でしか数値シミュレーションを行っていなかった。これを補うため、この章では、元のネットワーク系において N を様々に変えた数値シミュレーションを行い、平均場の絶対値の時間平均をプロットし [64]、有限サイズ効果を可視化するとともに転移点を正確に見積もる。ただし、パラメーターはそれぞれ $\gamma = 2.5$, $k_{\min} = 6$, $k_{\max} = 87$, $\epsilon = 0.02$ に固定する。

図 4.1(a) は、転移点近傍における平均場の絶対値の時間平均 $\langle |\bar{x}| \rangle_t$ をプロットしたものである ($\langle \cdot \rangle_t$ は時間平均を表す)。異なる N の曲線は有限サイズ効果のため互いに重ならず、特に、相対的に小さい N では、 $D > D_c$ の無秩序相において、有限サイズ効果によって絶対値の時間平均が大きく上方にずれている。これに対し、図 4.1(b) は、平均場の絶対値の時間平均が下記の有限サイズスケーリング則 [65, 66] に従う様子をプロットしたものである。

$$\langle |\bar{x}| \rangle_t = N^{1/4} F \left[(D - D_c) N^{1/2} \right] \quad (4.1)$$

ここで、 F はスケーリング関数と呼ばれる何らかの関数である。 N に関するリスケールによって、各 N での平均場のノイズ強度依存性が、特定の臨界ノイズ強度 D_c を仮定したときにほぼ共通の曲線上に乗ることが理解される (ここでは $D_c = 0.1749$ とした)。このことから、本研究の系の転移点近傍における平均場が、古典的なスケーリング則 $\sim (D_c - D)^{1/2}$ に従うことが確認された。

ここで、本研究の系では k_{\max} を有限の値に固定していることを強調しておく^{*1}。系のサイズ N の増加に伴ってネットワークの最大の次数 k_{\max} も大きくなるような系では、秩序パラメーターのスケーリン

^{*1} 公表論文では、シミュレーションにおいて、ネットワーク上の要素の個数 $N(k)$ を $Nr(k)$ の四捨五入 $[Nr(k) + 1/2]$ と等しくなるように定めている (ここで、 $[\cdot]$ は小数点下切り捨てを表すガウス記号である)。すなわち、公表論文中の最大次数 $k_{\max} = 87$ は、要素数 $N = 1800$ のときに、次数 k の要素の個数 $N(k) \simeq Nr(k)$ が $1/2$ を上回る最大の次数を意味している ($r(k)$ は 3.2.1 で定める、次数分布を表す実数関数である)。このため、公表論文で用いたネットワークの構成法では、 $N = 1800$ のとき $k = 87$ 付近の $1/2 \leq Nr(k) < 1$ の要素の個数を一様に $N(k) = 1 > Nr(k)$ に定めてしまう

グが古典的な場合とは異なる値をとりうるということが知られている [67].

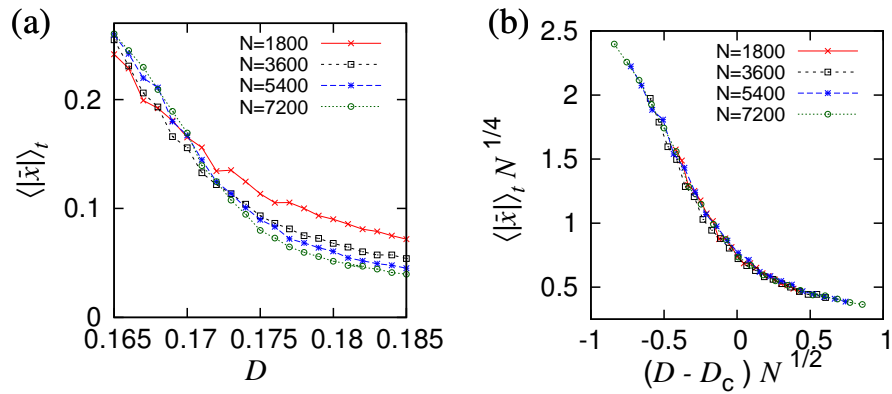


図 4.1 転移点付近の有限サイズスケーリング. (a): 平均場の絶対値の長時間平均 $\langle |\bar{x}| \rangle_t$ のノイズ強度依存性を, N を様々に変えて表示したもの. (b): 式 (4.1) に基づいてリスケールした, 転移点付近の平均場の絶対値の長時間平均のノイズ強度依存性. ここで, 臨界ノイズ強度は $D_c = 0.1749$ とした.

ため, 例えば $k = 87$ 付近において $1 \leq Nr(k) < 2$ である $N = 3600$ の場合と比較すると, 最大次数付近の数が過剰になってしまう. 同様に, $N = 5400$ などのときにも平均次数が相対的に大きくなる. このため, 図 4.1 では, $N = 1800$ と $N = 5400$ のネットワークを構成するとき, $N(k)$ を $N(k) = \left[\sum_{\ell=6}^k Nr(\ell) \right] - \sum_{\ell=6}^{k-1} N(\ell)$ という漸化式で与えている. これによって, $k = 87$ 付近への分布の偏りを防いでいる. 実際, すべての N において前者の方法でネットワークを構成すると, 平均次数がそれぞれ $N = 1800$ で $\bar{k} \approx 12.8256$, $N = 3600$ で $\bar{k} \approx 12.5822$, $N = 5400$ で $\bar{k} \approx 12.6493$, $N = 7200$ で $\bar{k} \approx 12.5984$ であるのに対し, 後者の構成法を用いた場合は $N = 1800$ において $\bar{k} \approx 12.6278$, $N = 5400$ で $\bar{k} \approx 12.6085$ となり, 異なるサイズ N のネットワーク間での次数の偏りが緩和されたものと期待される.

第 5 章

結論

多数の要素によって構成される系を描写する数理モデルである結合要素系は古くから研究されてきており、その多様なダイナミクスの解析によって、実世界の要素集団が示す現象の構造・成因や、数理モデルの一般的な性質が理解されてきた。ピッチフォーク分岐の標準形と等価なダイナミクスを示す要素の集団によって構成されている、ノイズを受けた結合双安定系は、典型的な結合要素系のひとつであり、結合のトポロジーが大域結合である場合には、系が秩序 - 無秩序転移を示すことが知られている。一方、実世界における普遍的な構造であるスケールフリーネットワークをトポロジーとした結合要素系が、ネットワーク構造の機能的意義の理解が求められることから、広い観点から研究されるようになり、そのダイナミクスの性質が徐々に明らかにされてきた。特に、ネットワークに対する平均場近似を用いた解析によって、スケールフリー上の結合要素系が示す次数に依存する挙動の性質が明らかにされてきた。すなわち、平均場近似を用いることによって、各要素の従う発展方程式が、結合強度の違いを除いて等しい関数形になること、およびその結合強度が次数によって決定される。しかし、この解析方法の有効性は、いくつかの特定の系においてしか確認されておらず、特に、定常状態に至る緩和過程において、この方法が適用できるかどうかは非自明である。また、スケールフリーネットワーク上のノイズを受けた結合要素系が秩序 - 無秩序転移を示すかどうか、大域結合の場合とどのような差異がみられるかについても、未だ理解されていない。複雑な構造を持つことを理由に本質の理解が一見困難であるスケールフリーネットワーク上のダイナミクスに対し、ダイナミクスを大胆に粗視化して描写できる平均場近似を用いた解析が、一般に適用できるか、緩和過程に対しても適用できるかの理解が求められている。

これに対し我々は、スケールフリーネットワーク上のノイズを受けた双安定系を導入することにより、系が大域結合系の場合と類似した秩序 - 無秩序転移を示すことや、次数が大きい要素から順に緩和することを見出した。ネットワークに対する平均場近似から導かれる非線形 Fokker-Planck 方程式 (NLFPE) が、この結果をよく再現することも確認した。大域結合系の NLFPE に対して Shiino (1987) が行った方法と類似する、自己無撞着性の解析を行うことにより、我々の系を近似する NLFPE の秩序 - 無秩序転移が確かめられた。

本研究の成果は、スケールフリーネットワーク上の一見複雑に見える転移や緩和過程を、平均場近似を用いた粗視化によって理解できうることを示した。これによって、スケールフリーネットワーク上の結合要素系の非定常状態を理解するための、ひとつの指針を与えることができたと考えられる。

今後、より様々な系が解析されていくことにより、ネットワーク上の多要素の系を理解するための方法が体系化されるとともに、トポロジーがネットワーク上の系にもたらす効果や、その結果生じるダイナミクス、さらにはそれらの機能的意義について、一般的知見が得られるものと考えられる。このような知見の獲得は、直接特定の現象の説明に結びつくものではないと考えられるが、実世界に普遍的に存在する、

ネットワーク構造を持つ系に対して，間接的に，しかしながら広範に，挙動の予言を与えるものと期待される．

謝辞

共同研究者である，東京工業大学の中尾裕也准教授に深く感謝いたします。中尾先生は，修士のころから研究のご指導をしてくださり，以来，お忙しいときであっても面倒を見てくださるばかりか，研究に限らず社会の多くの局面で役立つような様々なことをお教えるくださいました。この場を借りてお礼申し上げます。

博士課程在籍の間，研究生活に関して様々なことをお世話してくださった，篠本滋准教授や佐々真一教授，本研究科講師の市川正敏博士に深く感謝いたします。手続きなどで大変お世話になった，事務の方々，秘書の方々にお礼申し上げます。

非線形ダイナミクスや数理社会学の勉強会に参加させてくださり，それを通じて様々な既往研究や数理的背景を教えてください，本学情報学研究科の太田絵一郎研究員と香川大学講師の青木高明博士にお礼申し上げます。青木博士は，研究テーマについての相談も何度となく受けてくださいました。共同研究者であり，ドイツに行かれたのちも，学会等のたびに手ほどきをしてくださった，Fritz Haber 研究所の秦重史研究員に感謝を申し上げます。公表論文執筆にあたり，多くのアイデアを提供してくださった，同Fritz Haber 研究所の Alexander S. Mikhailov 教授にお礼を申し上げます。

他にも，生活面や精神面で多大な支援をしてくださった，京都周辺の友人たち，東京周辺の友人たち，全国の友人たち，家族に，この場を借りてお礼申し上げます。

最後に，この論文は，学術振興会の特別研究員奨励費の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Y. Atsumi, S. Hata, and H. Nakao, Phys. Rev. E, **88**, 052806 (2013).
- [2] A. T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer-Verlag, New York, 1980).
- [3] A. M. Turing, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. B **237**, 7 (1952).
- [4] P. S. Hagan, SIAM J. Appl. Math. **42**, 762 (1982).
- [5] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993).
- [6] B. Ermentrout, X. Chen, and Z. Chen, Physica D **108**, 147 (1997).
- [7] J. García-Ojalvo and J. M. Sancho, *Noise in Spatially Extended Systems* (Springer, New York, 1999).
- [8] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1992).
- [9] K. Kawasaki and T. Ohta, Physica A **116**, 573 (1982).
- [10] J. L. Van Hemmen and W. F. Wreszinski, J. Stat. Phys. **72**, 145 (1993).
- [11] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, Rev. Mod. Phys. **77**, 137 (2005).
- [12] H. Kori and Y. Kuramoto, Phys. Rev. E **63**, 046214 (2001).
- [13] S. K. Han, C. Kurrer, and Y. Kuramoto, Phys. Rev. Lett. **75**, 3190 (1995).
- [14] Y. Atsumi and H. Nakao, Phys. Rev. E **85**, 056207 (2012).
- [15] K. Komatani and H. Shimizu, J. Stat. Phys. **13**, 473 (1975).
- [16] R. C. Desai and R. Zwanzig, J. Stat. Phys. **19**, 1 (1978).
- [17] D. A. Dawson, J. Stat. Phys. **31**, 29 (1983).
- [18] M. Shiino, Phys. Rev. A **36**, 2393 (1987).
- [19] A. R. Bulsara and G. Schmerla, Phys. Rev. E **47**, 3734 (1993).
- [20] J. M. Casado, J. Gómez-Ordóñez, and M. Morillo, Europhys. Lett. **79**, 50002 (2007).
- [21] A. S. Pikovsky, A. Zaikin, and M. A. de la Casa, Phys. Rev. Lett. **88**, 050601 (2002).
- [22] C. J. Tessone, C. R. Mirasso, R. Toral, and J. D. Gunton, Phys. Rev. Lett. **97**, 194101 (2006).
- [23] R. Toral, C. Mirasso, and J. Gunton, Europhys. Lett. **61**, 162 (2003).
- [24] V. Hakim and W.-J. Rappel, Phys. Rev. A **46**, R7347 (1992); N. Nakagawa and Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. **89**, 313 (1993); M.-L. Chabanol, V. Hakim, and W.-J. Rappel, Physica D **103**, 273 (1997); M. Banaji and P. Glendinning, Phys. Lett. A **251**, 297 (1999).
- [25] D. H. Zanette, Phys. Rev. E **55**, 5315 (1997).
- [26] P. G. Lind, J. Corte-Real, and J. A. C. Gallas, Phys. Rev. E **69**, 026209 (2004).
- [27] T. Ichinomiya, Phys. Rev. E **70**, 026116 (2004).

- [28] J. G. Restrepo, E. Ott, and B. R. Hunt, Phys. Rev. E **71**, 036151 (2005).
- [29] T. W. Ko and G. B. Ermentrout, Phys. Rev. E **78**, 016203 (2008).
- [30] H. Nakao and A. S. Mikhailov, Phys. Rev. E **79**, 036214 (2009).
- [31] H. Nakao and A. S. Mikhailov, Nat. Phys. **6**, 544 (2010).
- [32] S. Hata, H. Nakao, and A. S. Mikhailov, Europhys. Lett. **98**, 64004 (2012).
- [33] M. Wolfrum, Physica D **241**, 1351 (2012).
- [34] C. N. Angstmann, I. C. Donnelly, and B. I. Henry, Phys. Rev. E **87**, 032804 (2013).
- [35] N. E. Kouvaris, H. Kori, and A. S. Mikhailov, PLoS ONE **7**, e45029 (2012).
- [36] N. E. Kouvaris and A. S. Mikhailov, Europhys. Lett. **102**, 16003 (2013).
- [37] J. A. Acebrón, S. Lozano, and A. Arenas, Phys. Rev. Lett. **99**, 128701 (2007).
- [38] M. Perc, Phys. Rev. E **78**, 036105 (2008).
- [39] M. Perc and M. Gosak, New J. Phys. **10**, 053008 (2008).
- [40] S. H. Strogatz, Nature (London) **410**, 268 (2001).
- [41] A. S. de Wijn, B. Hess, and B. V. Fine, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 254012 (2013).
- [42] E. Ravasz, A. L. Somera, D. A. Mongru, Z. N. Oltvai, A.-L. Barabási, Science, **297**, 1551 (2002).
- [43] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Phys. Rev. Lett. **86**, 3200 (2001).
- [44] D. J. Watts, S. H. Strogatz, Nature **393**, 440 (1998).
- [45] A.-L. Barabási and R. Albert, Science **286**, 509 (1999).
- [46] R. Albert and A.-L. Barabási, Rev. Mod. Phys. **74**, 47 (2002).
- [47] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, Phys. Rev. E **64**, 026118 (2001).
- [48] M. Catanzaro, M. Boguñá, and R. Pastor-Satorras, Phys. Rev. E **71**, 027103 (2005).
- [49] T. Frank, A. Daffertshofer, C. Peper, P. Beek, and H. Haken, Physica D **150**, 219 (2001).
- [50] T. Frank and A. Daffertshofer, Physica A **295**, 455 (2001).
- [51] R. Lambiotte, M. Ausloos, and J. A. Holyst, Phys. Rev. E **75**, 030101 (2007).
- [52] D. Bray, J. Theor. Biol. **143**, 215 (1990).
- [53] N. Barkai and S. Leibler, Nature **387**, 913 (1997).
- [54] B. Andò, S. Baglio, A.R. Bulsara and V. Sacco, IEEE Inst. Meas. Mag. **8**, 64 (2005).
- [55] A. Barrat, M. Barthélemy, and A. Vespignani, *Dynamical Processes on Complex Networks* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [56] H. A. Kramers, Physica **7**, 284 (1940).
- [57] R. Ferrando, R. Spadacini, and G. E. Tommei, Phys. Rev. E **48**, 2437 (1993).
- [58] H. Risken, *The Fokker-Planck equation: Methods of Solution and Applications* (Springer, Berlin, 1989).
- [59] C. W. Gardiner, *Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences* (Springer, New York, 2009).
- [60] S. Kullback and R. A. Leibler, Ann. Math. Stat. **22**, 79 (1951).
- [61] K. Sznajd-Weron and J. Sznajd, Int. J. Mod. Phys. C **11**, 1157 (2000).
- [62] A. T. Bernardes, D. Stauffer, and J. Kertész, Eur. Phys. J. B **25**, 123 (2002).
- [63] P. Nyczka, J. Cisko, K. Sznajd-Weron, Physica A **391**, 317 (2012).
- [64] H. Hong, B. J. Kim, Phys. Rev. E **66**, 018101 (2002).
- [65] A. Pikovsky and S. Ruffo, Phys. Rev. E **59**, 1633 (1999).

-
- [66] Y. Kawamura and Y. Kuramoto, Phys. Rev. E **69**, 016202 (2004) .
- [67] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Phys. Rev. E **65**, 035108 (2002).